

EXOS 01

CH01 - Polynômes du second degré - Exercices (Correction)

DEV Logiciel

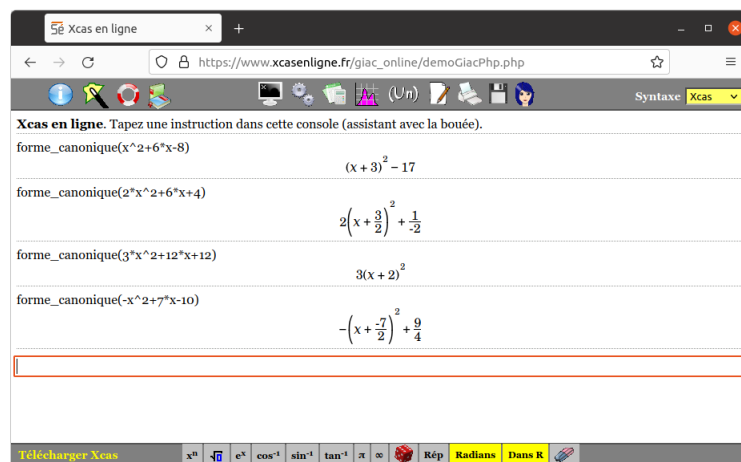
Les captures d'écran ont été obtenues grâce au logiciel , et notamment sa version en ligne disponible à l'adresse  <https://www.xcasenligne.fr>.

Cependant, les simplifications faites par le logiciel ne donnent pas forcément une écriture « identique » à celle trouvée à la main, donc « prudence »!

Exercice 1




1. Pour la forme canonique, il s'agit de $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = a \times \alpha^2 + b \times \alpha + c$.

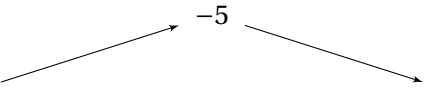


2. Pour déterminer le tableau de variation d'un trinôme, on utilise α, β puis l'« ouverture » de la parabole :

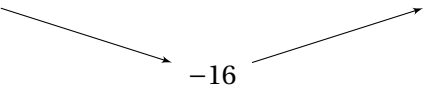
- a. $f(x) = 2(x - 4)^2 + 3$ est sous forme canonique :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
f			

- b. $g(x) = -3(x + 1)^2 - 5$ est sous forme canonique :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g			

- c. $h(x) = x(x - 8)$ donne la forme canonique $h(x) = (x - 4)^2 - 16$:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
h			

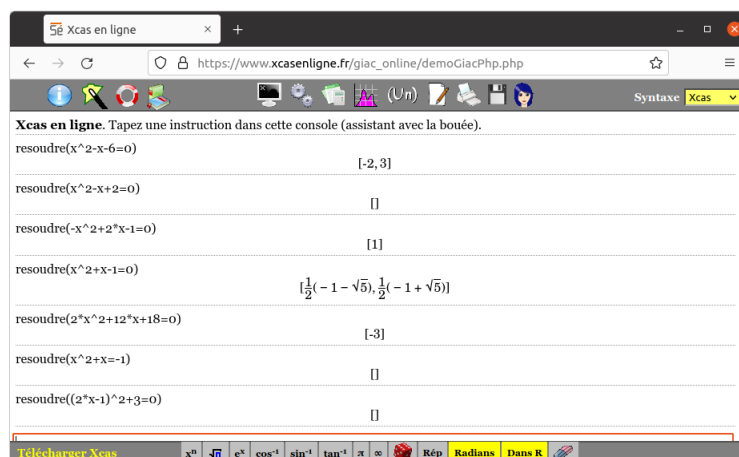
3. a. On a $f(x) = -2(x - 2)^2 - 5$, et la parabole, « non souriante », a pour sommet $(2; -5)$.
 b. De ce fait, le maximum de f est $M = -5$, atteint pour $x = 2$.

Exercice 2



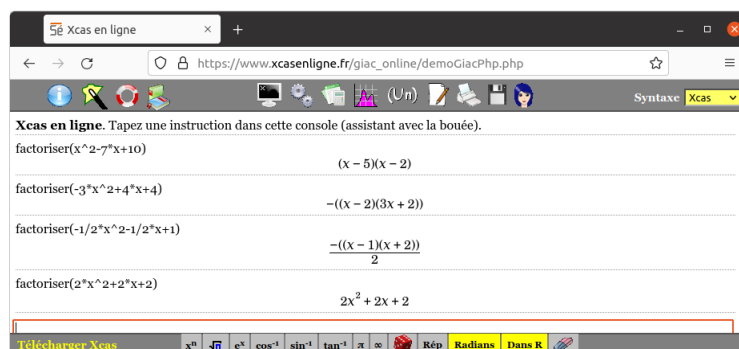
1. Pour résoudre les équations, on vérifie que ce sont des équations du 2^d degré « avec 0 de l'autre côté », et si besoin on « transforme » :

- on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$;
- suivant son signe on a :
 - aucune racine (et aucune factorisation) si $\Delta < 0$;
 - une racine $(-b/2a)$ si $\Delta = 0$;
 - deux racines $((-b \pm \sqrt{\Delta})/2a)$ si $\Delta > 0$.



2. Pour écrire un trinôme sous forme factorisée, on calcule ses éventuelles racines (via Δ) puis :

- factorisation $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$;
- factorisation $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$;
- pas de factorisation si $\Delta < 0$.

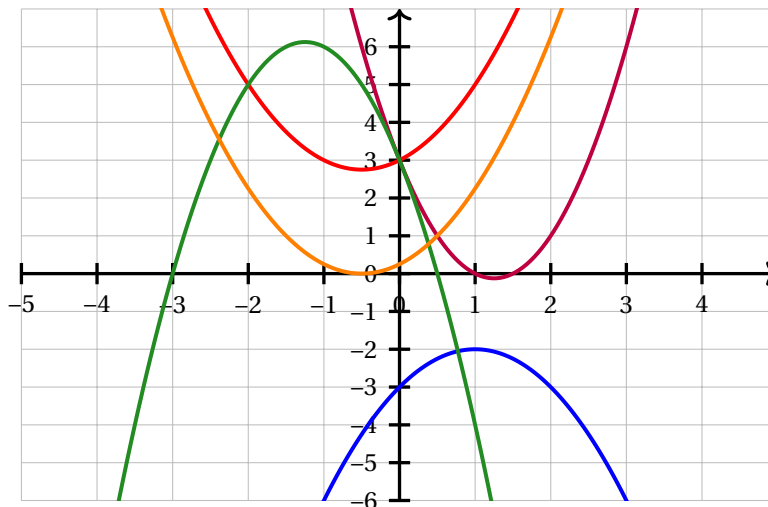
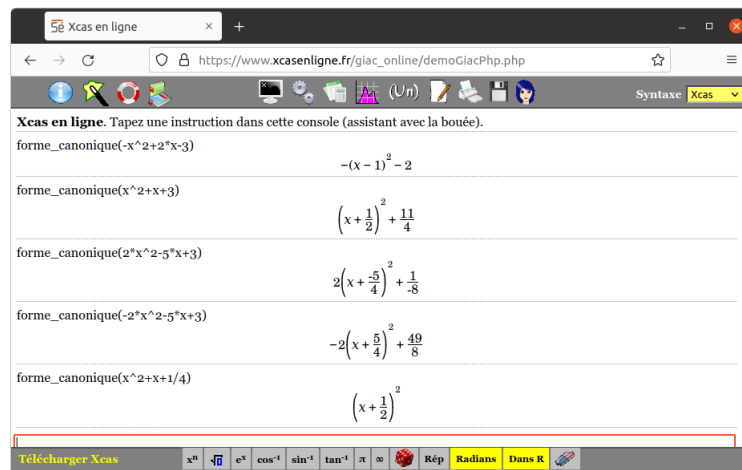


Exercice 3



On détermine les formes canoniques pour déterminer les tableaux de variations, et donc la courbe correspondante !

- $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3 = -(x - 1)^2 - 2$ avec le sommet en $(1; -2)$.
- $f_2(x) = x^2 + x + 3 = (x + 0,5)^2 + 2,75$ avec le sommet en $(-0,5; 2,75)$.
- $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3 = -2(x - 1,25)^2 - 0,125$ avec le sommet en $(1,25; -0,125)$.
- $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3 = -2(x + 1,25)^2 + 6,125$ avec le sommet en $(-1,25; 6,125)$.
- $f_5(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + 0,5)^2$ avec le sommet en $(-0,5; 0)$.



$$\begin{aligned} f_1(x) &= -x^2 + 2x - 3 \\ f_2(x) &= x^2 + x + 3 \\ f_3(x) &= 2x^2 - 5x + 3 \\ f_4(x) &= -2x^2 - 5x + 3 \\ f_5(x) &= x^2 + x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 4



1. Pour résoudre les équations suivantes, on les **transforme** pour se ramener à une équation que l'on sait résoudre :

- a. L'équation proposée ne peut pas (encore) être résolue (pb avec le « x^3 »), on transforme !

$$x^3 - 8x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8x + 18) = 0 \text{ qui est une \textbf{équation produit} :}$$

- $x = 0$ ou
- $x^2 - 8x + 18 = 0$ pour lequel $\Delta = -8$ donc pas de solution pour cette « partie »

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \{0\}.$$

- b. Pour la deuxième équation, on va utiliser le **produit en croix**, et on a une valeur interdite ($x = -1$).

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = (2x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0.$$

On a $\Delta = 9$ et les deux racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$ (valeur interdite!).

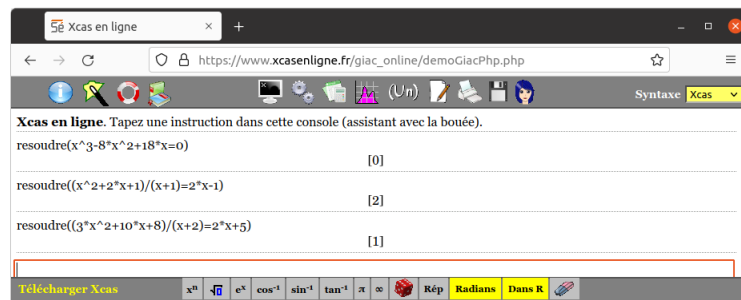
$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \{2\}.$$

- c. $\frac{3x^2 + 10x + 8}{x + 2} = 2x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 = (x + 2)(2x + 5) \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 = 2x^2 + 9x + 10$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ (avec } x \neq -2).$$

On a $\Delta = 9$ et les deux racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ (valeur interdite!).

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \{1\}.$$



2. a. L'équation admet une seule racine (double) dans le cas où le discriminant est nul.
 Et $\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow -4m = -20 \Leftrightarrow m = 5$.
- b. Dans ce cas, la racine (double) vaut $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$ (c'est l'identité remarquable $x^2 - 4x + 4$!)
3. a. 2 est solution de l'équation car $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.
- b. La somme des racines vaut $-b/a = 5$ et le produit des racines vaut $c/a = -6$.
- c. On a donc $x_1 = 2$ et donc $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2 = 3$.
4. a. $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases} \Rightarrow x \text{ et } y \text{ sont les racines de } X^2 - 18X + 65$.
 On utilise Δ , et on trouve $x = 13$ et $y = 5$ (ou le contraire...)
- b. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases} \Rightarrow x \text{ et } y \text{ sont les racines de } X^2 - 4X + 5$.
 On utilise Δ , et on ne trouve aucune solution...

Exercice 5



On pose x le côté du premier carré, de sorte qu'on cherche x tel que $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 15125$
 Et $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 15125 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 15150 = 0$ qui donne $x = 70$ (l'autre solution est négative!).
 De même, on cherche x tel que $3x^2 + 6x - 15122 = 0$ qui ne donne aucune solution entière!

Exercice 6



On détermine :

- l'aire totale du drapeau : $\mathcal{A}_T = 4 \times 3 = 12$;
- l'aire de la croix : $\mathcal{A}_C = (\text{bde horiz}) + (\text{bde vert}) - (\text{petit carré du milieu en double}) = x \times 4 + x \times 3 - x^2 = -x^2 + 7x$.

On cherche donc x ($x \geq 0$) tel que $\mathcal{A}_C = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 7x = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 0$.

On obtient $\Delta = 25$ et la solution (positive) $x = 1$ (l'autre vaut -6 !)

Donc la bande doit avoir une largeur de 1 m.

Exercice 7



?? PythonTeX??

Code Python

On peut vérifier sur <https://python.cpierquet.fr/?from=examples/2m2chap01exos.py> :

?? PythonTeX??