Spécialité Mathématiques en classe de Première

Spécialité Mathématiques en classe de Première 1
01 CH01 - Polynômes du second degré 6
1 Différentes formes d'écriture 6
1.1 Forme développée réduite 6
1.2 Forme canonique 6
1.3 Forme factorisée 7
2 Discriminant et racines 7
2.1 Mise sous forme canonique 7
2.2 Discriminant 8
2.3 Calcul des racines 9
2.4 Résolution d'équations de degré 2 10
2.5 Somme et produit des racines 10
02 CH01 - Polynômes du second degré - Exercices 11
03 CH01 - Polynômes du second degré - Exercices (Correction) 14
04 CH02 - Suites numériques 18
1 Définitions 18
1.1 Vocabulaire et notations 18
1.2 Différents modes de définition 18
1.3 Méthodes de calculs 19
2 Représentation graphique 19
2.1 Cas général 19
2.2 Cas d'une suite récurrente 20
3 Sens de variation 21
3.1 Définition 21
3.2 Méthodes de recherche 21
4 Compléments 21
4.1 Limite d'une suite 21
4.2 Suites et algorithmes 22
4.3 Suites et Représentations graphiques 24
4.4 Point histoire 25
05 CH02 - Suites numériques - Exercices 26
06 CH02 - Suites numériques - Exercices (Correction) 28
07 CH03 - Droites et fonctions affines 31
1 Généralités 31
1.1 Définition 31
1.2 Représentation graphique 31
1.3 Tracé 32

2 Sens de variations, signe d'une fonction affine 33
2.1 Sens de variation 33
2.2 Signe 33
3 Compléments - Tableaux de signes, inéquations 34
08 CH03 - Droites et fonctions affines - Exercices 35
09 CH03 - Droites et fonctions affines - Exercices (Correction) 37
10 CH04 - Second degré, études de signes 43
1 Signe d'une fonction du second degré 43
1.1 Idée 43
1.2 Le théorème 43
2 Résolution d'inéquations 45
2.1 Cas du second degré 45
2.2 Cas général 45
3 Position relative de deux courbes 46
11 CH04 - Second degré, études de signes - Exercices 47
12 CH04 - Second degré, études de signes - Exercices (Correction) 48
13 CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance 53
1 Rappels sur les probabilités 53
1.1 Généralités 53
1.2 Événements, calculs de probabilités 53
2 Arbre pondéré, probabilités conditionnelles 54
2.1 Utilisation d'un arbre pondéré 54
2.2 Probabilité conditionnelle 55
2.3 Formule des probabilités totales 56
3 Indépendance 58
3.1 Événements indépendants 58
3.2 Expériences indépendantes 58
14 CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance - Exercices 60
15 CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance - Exercices (Correction) 62
16 CH06 - Trigonométrie 64
1 Mesure d'angle en radians 64
1.1 Le cercle trigonométrique 64
1.2 Longueur d'arc et mesure en radian 64
2 Enroulement autour du cercle 65
2.1 Le principe 65
2.2 Valeurs remarquables 66
3 Fonctions sinus et cosinus 66
3.1 Définition 66
3.2 Valeurs remarquables 67
3.3 Propriétés complémentaires 68
3.4 Tableaux de signes, variations et courbes représentatives 69

17 CH06 - Trigonométrie - Exercices ... 70
18 CH06 - Trigonométrie - Exercices (Correction) ... 72
19 CH07 - Dérivation locale ... 75
1 Taux d'accroissement ... 75
2 Nombre dérivé ... 75
3 Tangente ... 77
20 CH07 - Dérivation locale - Exercices ... 79
21 CH07 - Dérivation locale - Exercices (Correction) ... 81
22 CH08 - Fonctions dérivées ... 83
1 Rappels ... 83
2 Calculs de fonctions dérivées ... 83
2.1 Définition ... 83
2.2 Fonctions de référence ... 83
2.3 Opérations de base sur les fonctions ... 84
3 Fonctions composées ... 86
3.1 Définition ... 86
3.2 Dérivation ... 86
23 CH08 - Fonctions dérivées - Exercices ... 87
24 CH08 - Fonctions dérivées - Exercices (correction) ... 89
25 CH09 - Suites arithmétiques, géométriques ... 92
1 Suites arithmétiques ... 92
1.1 Définition ... 92
1.2 Formule explicite ... 92
1.3 Sens de variation ... 93
1.4 Modélisation ... 93
1.5 Somme des premiers termes ... 94
2 Suites géométriques ... 95
2.1 Définition ... 95
2.2 Formule explicite ... 96
2.3 Sens de variation ... 96
2.4 Modélisation ... 97
2.5 Somme des premiers termes ... 97
26 CH09 - Suites arithmétiques, géométriques - Exercices ... 98
27 CH09 - Suites arithmétiques, géométriques - Exercices (Correction) ... 101
28 CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire ... 103
1 Rappels sur les vecteurs ... 103
1.1 Vecteurs et coordonnées ... 103
1.2 Vecteurs et colinéarité ... 103
2 Produit scalaire ... 103
2.1 Définition ... 103
2.2 Cas des vecteurs colinéaires ... 104

2.3 Cas des vecteurs orthogonaux ... 104
3 Expressions du produit scalaire ... 104
3.1 Expression géométrique ... 104
3.2 Projection orthogonale ... 105
3.3 Expression analytique ... 105
4 Propriétés du produit scalaire ... 106
4.1 Condition d'orthogonalité ... 106
4.2 Symétrie et bilinéarité ... 106
4.3 Normes et produit scalaire ... 107
4.4 Décomposition de vecteurs ... 107
29 CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire - Exercices ... 108
30 CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire - Exercices (Correction) ... 110
31 CH11 - Applications de la dérivation ... 112
1 Lien entre dérivée et tangente ... 112
1.1 Rappels ... 112
1.2 Théorème fondamental ... 112
1.3 Une méthode très importante ... 113
2 Optimisation ... 114
2.1 Définition ... 114
2.2 Propriété ... 114
32 CH11 - Applications de la dérivation - Exercices ... 115
33 CH11 - Applications de la dérivation - Exercices (Correction) ... 117
34 CH12 - Variables aléatoires ... 120
1 Variable aléatoire ... 120
1.1 Définition ... 120
1.2 Loi de probabilité ... 121
2 Paramètres d'une variable aléatoire ... 121
2.1 Espérance mathématique ... 121
2.2 Variance et écart-type ... 123
3 Simulation, modélisation ... 124
3.1 Simulation ... 124
3.2 Modélisation ... 124
35 CH12 - Variables aléatoires - Exercices ... 125
36 CH12 - Variables aléatoires - Exercices (Correction) ... 127
37 CH13 - Fonction exponentielle ... 130
1 Définitions ... 130
1.1 Fonction exponentielle ... 130
1.2 Le nombre e ... 130
2 Étude de la fonction exponentielle ... 131
2.1 Signe ... 131
2.2 Tableau de variations ... 131

2.3 Courbe représentative ... 131
3 Propriétés algébriques ... 132
3.1 Relation fonctionnelle ... 132
3.2 Lien avec les suites géométriques ... 132
3.3 Nouvelle notation ... 133
4 Compléments ... 133
4.1 Résolution d'équations et d'inéquations ... 133
4.2 Fonctions composées ... 134
38 CH13 - Fonction exponentielle - Exercices ... 135
39 CH13 - Fonction exponentielle - Exercices (Correction) ... 137
40 CH14 - Compléments sur le produit scalaire ... 142
1 Applications du produit scalaire ... 142
1.1 Théorème d'Al-Kashi ... 142
1.2 Étude d'un ensemble de points ... 143
1.3 Caractérisation d'un cercle ... 143
2 Équation cartésienne de droites ... 144
2.1 Vecteur directeur ... 144
2.2 Vecteur normal ... 144
2.3 Équation cartésienne de droite ... 145
3 Équation cartésienne de cercles ... 146
3.1 Cercle défini par centre et rayon ... 146
3.2 Cercle défini par un diamètre ... 147
41 CH14 - Compléments sur le produit scalaire - Exercices ... 149
42 CH14 - Compléments sur le produit scalaire - Exercices (Correction) ... 152
43 CH15 - Méthodes et techniques à connaître ... 156
44 En route vers la Terminale ... 160
1 Suites et second degré ... 160
2 Probabilités conditionnelles et variables aléatoires ... 161
3 Fonctions ... 163
4 Géométrie ... 166
5 Algorithmes ... 168
6 Utilisation de la calculatrice ... 169

DOC 01

CH01 - Polynômes du second degré

I. Différentes formes d'écriture

I.1. Forme développée réduite

Définition

On appelle **polynôme du second degré** ou **trinôme** une expression de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ des réels fixés tels que } a \neq 0$$

ou toute autre expression qui peut se mettre sous cette forme, qu'on appelle **forme développée réduite**.
Les nombres a, b, c sont les **coefficients** du polynôme.

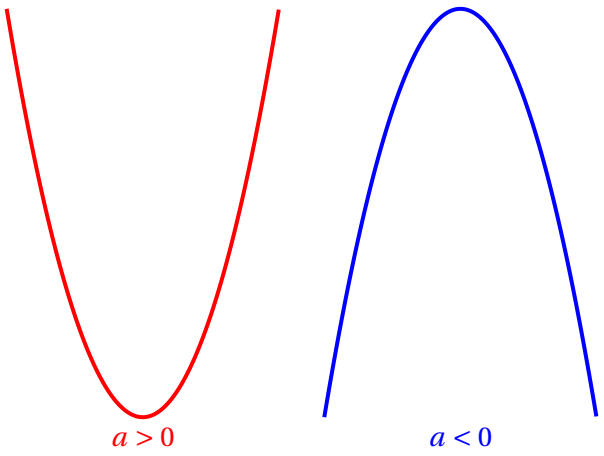
Remarque

Polynôme signifie *plusieurs monômes*. Un monôme désigne une expression de la forme ax^n, où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient** du monôme, et $n \in \mathbb{N}$ est son **degré**.

Propriété

La courbe représentative d'une telle fonction est toujours une **parabole**. Elle est « ouverte vers le haut » (« souriante ») si a est positif, elle est « ouverte vers le bas » si a est négatif.

Illustration



I.2. Forme canonique

Définition

La **forme canonique** d'un tel polynôme est celle qui s'écrit en utilisant une seule fois la lettre x, et qui permet de trouver facilement le **programme de calcul** de la fonction.
Elle est toujours de la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Propriété

Dans la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et α et β sont les **coordonnées du sommet** de la parabole qui représente f.

Démonstration

- Le point S(α ; β) est bien un point de la parabole car $f(\alpha) = a \times 0 + \beta = \beta$.
- Comme $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

si $a > 0$	si $a < 0$
$a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$	$a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$
$a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$	$a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$
$f(x) \geqslant \beta$	$f(x) \leqslant \beta$
β est le minimum de f	β est le maximum de f

Propriété

Une parabole est symétrique par rapport à la verticale passant par son sommet.

I.3. Forme factorisée

Définition

Dans certains cas, un polynôme du second degré *peut* aussi s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

où a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme.
Cette écriture s'appelle la **forme factorisée** du polynôme.

Propriété

Les **racines** du polynôme sont les valeurs qui annulent le polynôme.
Ce sont les abscisses des **points d'intersection** de la parabole avec l'axe des abscisses.

Point histoire

Mohammed Al-Khwarizmi (780/850,) est le premier des mathématiciens persans, et sans doute le plus connu. Il vit à Bagdad du temps de la splendeur de la dynastie abbasside. Le plus célèbre de ses écrits, *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* fut traduit en latin au XII^{e} siècle, sous le titre *Algebra*. Traitant de la résolution des équations du second degré, il est considéré comme le premier manuel d'algèbre.

II. Discriminant et racines

II.1. Mise sous forme canonique

Propriété

Dans la forme canonique, α et β se déterminent grâce aux formules suivantes :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration

On a $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

On retrouve bien la formule donnée pour α et on a vu plus haut déjà que $f(\alpha) = \beta$.

Algorithme

En python, on peut créer une fonction permettant de calculer les valeurs de α et de β :

Code Python

```
# Calcul de alpha et de beta
from math import *
def formecanonique(a,b,c):
    alpha = -b/(2*a)
    beta = a*alpha**2 + b*alpha + c
    return alpha, beta
```

Début de la console python

```
>>> formecanonique(-3,-5,2)
(-0.8333333333333334, 4.083333333333334)
```

Fin de la console python

II.2. Discriminant

Définition

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant** et on note Δ le nombre

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c.$$

Propriété

Le polynôme ne peut être factorisé que si Δ est positif.

Démonstration

Dans la forme canonique, avec les formules ci-dessus, on a :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Lorsque Δ est positif, on voit apparaître dans les crochets une différence de deux carrés, que l'on sait factoriser à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;
- Quand Δ est négatif, on y retrouve une somme de deux nombres positifs.

Algorithme

En python, on peut créer une fonction permettant de calculer la valeur de Δ :

Code Python

```
# Calcul de delta
from math import *
def delta(a,b,c):
    delta = b**2 -4*a*c
    return delta
```

Début de la console python

```
>>> delta(-3,-5,2)
49
```

Fin de la console python

II.3. Calcul des racines

Théorème

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'a **pas de racine réelle**. Il ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme a **une seule racine**, appelée **racine double**. Elle est égale à $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. La forme canonique est également la forme factorisée.
- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme a **deux racines réelles** x_1 **et** x_2 que l'on calcule grâce aux formules

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration

On a $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver les racines de f.

Algorithme

En python, on peut créer une procédure permettant de calculer les éventuelles racines :

Code Python

```python
# Calcul des éventuelles racines
from math import *
def racines(a,b,c):
    # Calcul de Delta avec la fonction précédente
    d = delta(a,b,c)
    print(f"Delta={d}")
    if d < 0 :
        print("Aucune racine")
    elif d == 0 :
        print(f"Une racine, {-b/(2*a)}")
    else :
        print(f"Deux racines, {(-b+sqrt(d))/(2*a)} et {(-b-sqrt(d))/(2*a)}")
```

Début de la console python

```
>>> racines(-3,-5,2)
Delta=49
Deux racines, -2.0 et 0.3333333333333333
>>> racines(1,1,1)
Delta=-3
Aucune racine
>>> racines(1,-2,1)
Delta=0
Une racine, 1.0
```

Fin de la console python

II.4. Résolution d'équations de degré 2

Idée

Jusqu'à maintenant, pour résoudre une équation de degré 2, le seul outil dont on disposait était la « règle du produit nul » : un produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul.
Pour cela, il fallait donc se ramener à quelque chose de *nul* en passant tout dans un seul membre de l'équation, puis à un *produit* en factorisant, ce qui n'était pas toujours possible.
Nous avons désormais la possibilité d'utiliser les formules discriminant/racines au lieu de factoriser, **à condition** tout de même d'avoir une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

Point histoire

Les équations du second degré sont au centre de l'algèbre **babylonienne**, dès avant le XVIII^e siècle avant JC. La tablette d'argile BM 1390 a été qualifiée de « véritable petit manuel d'algèbre, consacré à l'équation du second degré et aux systèmes d'équations, et donnant les procédures résolutoires fondamentales ».
Au VIII^e siècle, le mathématicien indien *Sridhar Acharya* indique la manière de calculer les deux racines réelles.
Les équations du second degré ont été étudiées systématiquement par *Al-Khwarizmi*.

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré (c'est-à-dire « avec des x^2 »), on peut :

- développer ;
- tout passer dans le même membre pour avoir … = 0 ;
- calculer Δ et les éventuelles racines ;
- conclure en donnant l'ensemble des solutions (suivant les cas, $\emptyset$, $\{\alpha\}$ ou $\{x_1 ; x_2\}$).

II.5. Somme et produit des racines

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2. Alors :

- la somme des racines est égale à $\dfrac{-b}{a}$;
- le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Démonstration

Il suffit de calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ avec les formules des racines !

Remarques

- On a donc $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \alpha$, autrement dit la moyenne des racines est égale à α.
  On retrouve ici l'idée de symétrie de la parabole, par rapport à la verticale passant par son sommet. C'est une façon de déterminer α (et donc la forme canonique) directement à partir de la forme factorisée, sans passer par l'étape développée.
- Ces propriétés sont intéressantes lorsque l'une des deux racines est une *racine évidente*, c'est-à-dire une racine que l'on peut *voir* (souvent un petit nombre entier). On utilise alors la formule de la somme ou du produit pour déterminer la deuxième racine sans avoir à calculer Δ (mais dans tous les cas, on peut aussi déterminer les racines avec la méthode habituelle).

DOC 02

CH01 - Polynômes du second degré - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Dans chaque cas, écrire le trinôme sous sa forme canonique :
   a. x^2+6x-8 ;
   b. $2x^2+6x+4$;
   c. $3x^2+12x+12$;
   d. $-x^2+7x-10$.
2. Déterminer le tableau de variation des fonctions suivantes :
   a. $f(x)=2(x-4)^2+3$;
   b. $g(x)=-3(x+1)^2-5$;
   c. $h(x)=x(x-8)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+8x-13$.
   a. Déterminer la forme canonique de la fonction f.
   b. En déduire le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

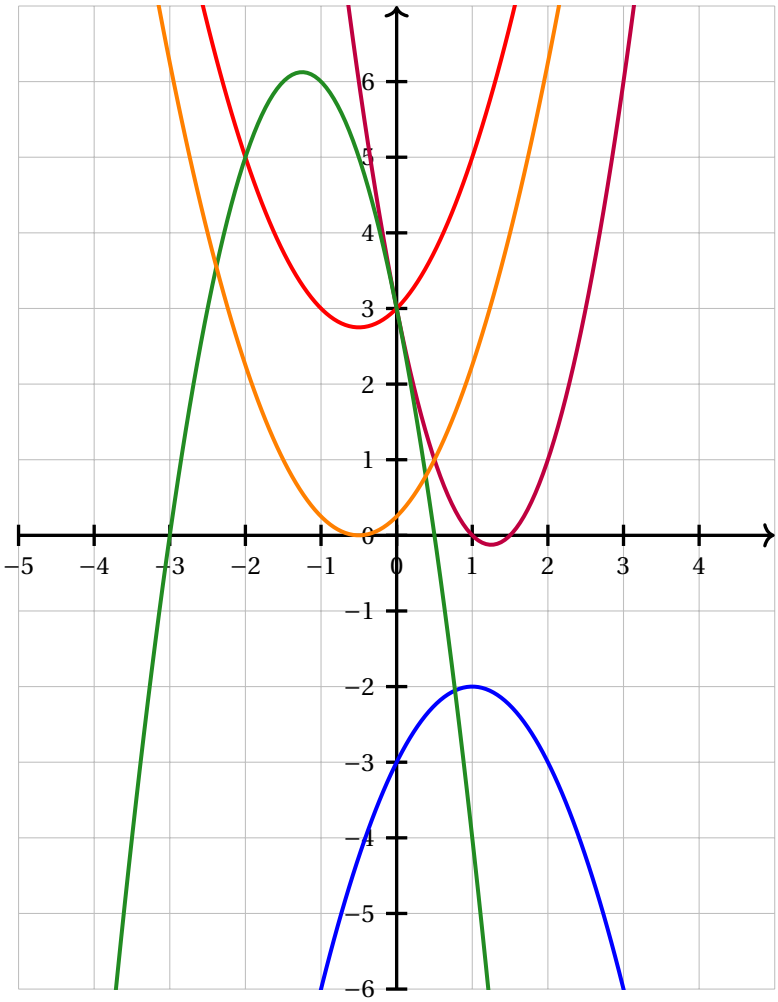
Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
   a. $x^2-x-6=0$;
   b. $x^2-x+2=0$;
   c. $-x^2+2x-1=0$;
   d. $x^2+x-1=0$;
   e. $2x^2+12x+18=0$;
   f. $x^2+x=-1$;
   g. $(2x-1)^2+3=0$.
2. Écrire – si possible – les trinômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs :
   a. $f(x)=x^2-7x+10$;
   b. $g(x)=-3x^2+4x+4$;
   c. $h(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$;
   d. $i(x)=2x^2+2x+2$.

Exercice 3

Sur le graphique suivant, on donne cinq paraboles.
Attribuer, en justifiant, à chacune de ces courbes la fonction qui lui est associée.



$f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$

$f_2(x) = x^2 + x + 3$

$f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$

$f_5(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

Exercice 4

Les questions suivantes sont *indépendantes*.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations (on transformera si besoin !) :
   a. $x^3 - 8x^2 + 18x = 0$;
   b. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 2x - 1$;
   c. $\dfrac{3x^2 + 10x + 8}{x + 2} = 2x + 5$.
2. On considère l'équation $x^2 - 4x + (m - 1) = 0$ où m est un paramètre.
   a. Pour quelle valeur de m l'équation admet-elle une seule racine (double) ?
   b. Calculer cette racine.
3. On considère l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   a. Vérifier que 2 est solution de cette équation.
   b. Quelle est la somme et le produit des racines ?
   c. En déduire l'autre solution.

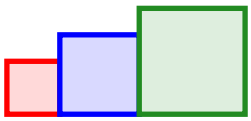
4. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=65 \end{cases}$;

b. $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$.

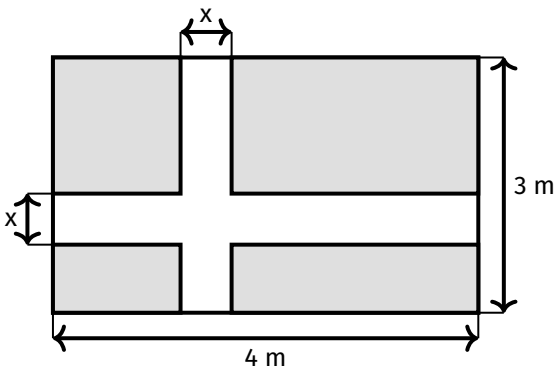
Exercice 5

Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers *consécutifs* et dont la somme des aires est 15 125 ?
Si oui préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés.
Même question avec 15 127.



Exercice 6

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Exercice 7

Créer une procédure, en python, qui :

- prendra en paramètres les coefficients a, b et c d'un trinôme ax^2+bx+c ;
- affichera les coordonnées du sommet de la parabole représentant le trinôme ;
- indiquera également l'orientation de cette parabole

Code Python

```
def analysetrinome(a,b,c) :
    alpha = .....
    beta = ......
    print(f"Le sommet de la parabole a pour coordonnées ..........")
    if a ...... :
        print(......)
    else :
        print(......)
```

On devra avoir, par exemple :

Début de la console python

```
>>> analysetrinome(-1,2,-3)
Le sommet de la parabole a pour coordonnées (1.0,-2.0)
La parabole est ouverte vers le bas
```

Fin de la console python

DOC 03

CH01 - Polynômes du second degré - Exercices (Correction)

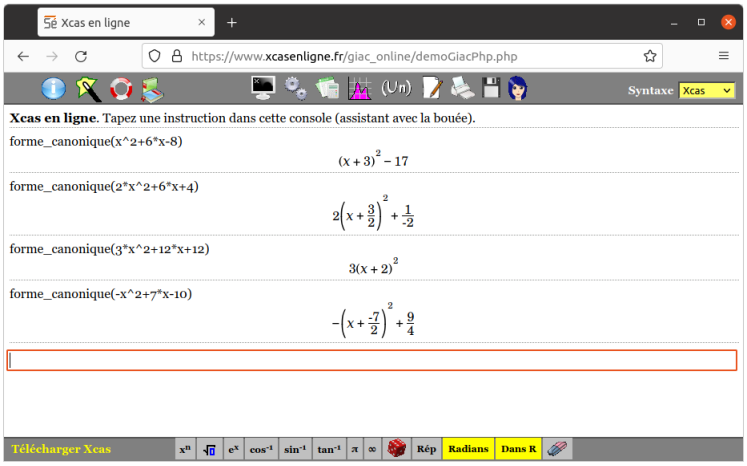
DEV Logiciel

Les captures d'écran ont été obtenues grâce au logiciel SHELL Xcas, et notamment sa version en ligne disponible à l'adresse SHELL `https://www.xcasenligne.fr`.

Cependant, les simplifications faites par le logiciel ne donnent pas forcément une écriture « identique » à celle trouvée à la main , donc « prudence » !

Exercice 1

1. Pour la forme canonique, il s'agit de $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=a\times\alpha^2+b\times\alpha+c$.



2. Pour déterminer le tableau de variation d'un trinôme, on utilise α, β puis l'« ouverture » de la parabole :

a. $f(x)=2(x-4)^2+3$ est sous forme canonique :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		↘	3	↗	

b. $g(x)=-3(x+1)^2-5$ est sous forme canonique :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g		↗	-5	↘	

c. $h(x)=x(x-8)$ donne la forme canonique $h(x)=(x-4)^2-16$:

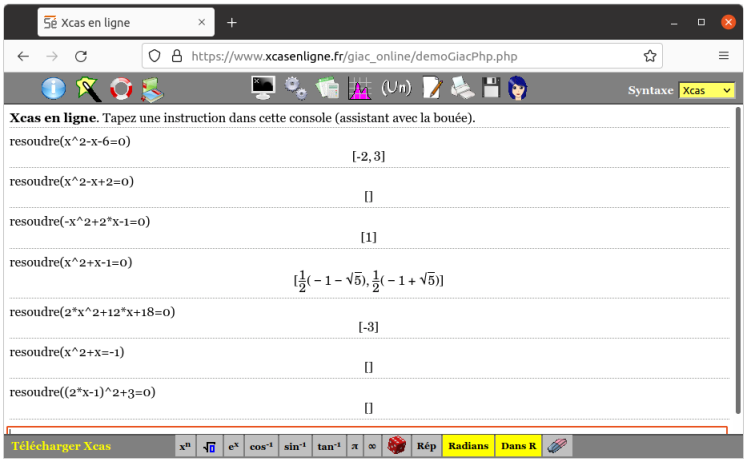
x	$-\infty$		4		$+\infty$
h		↘	-16	↗	

3. **a.** On a $f(x)=-2(x-2)^2-5$, et la parabole, « non souriante », a pour sommet $(2;-5)$.

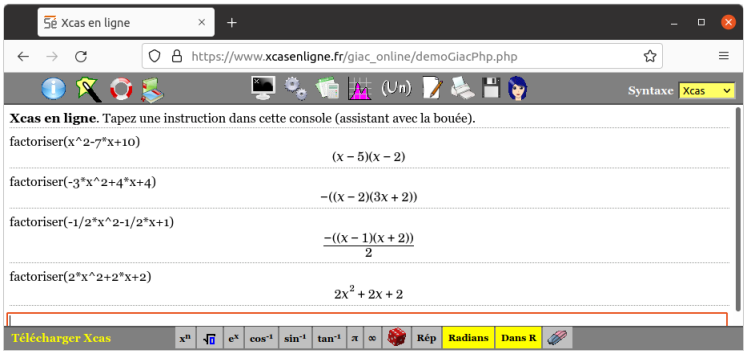
b. De ce fait, le maximum de f est $M=-5$, atteint pour $x=2$.

Exercice 2

1. Pour résoudre les équations, on vérifie que ce sont des équations du 2$^{\text{d}}$ degré « avec 0 de l'autre côté », et si besoin on « transforme » :
   - on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$;
   - suivant son signe on a :
     - aucune racine (et aucune factorisation) si $\Delta < 0$;
     - une racine $(-b/2a)$ si $\Delta = 0$;
     - deux racines $((-b \pm \sqrt{\Delta})/2a)$ si $\Delta > 0$.



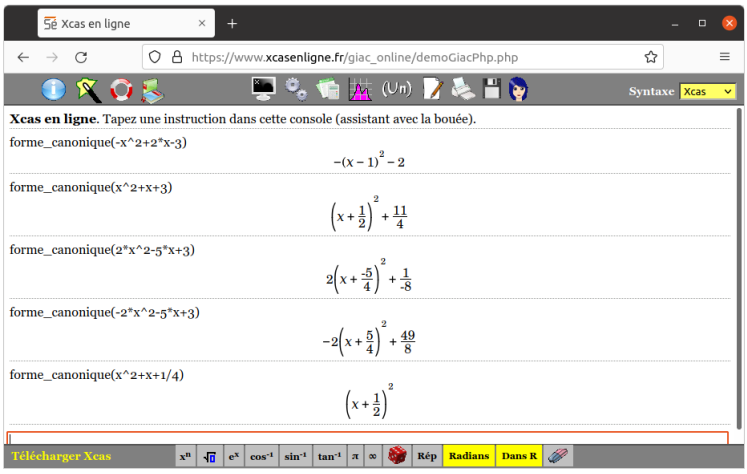
2. Pour écrire un trinôme sous forme factorisée, on calcule ses éventuelles racines (via Δ) puis :
   - factorisation $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$;
   - factorisation $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$;
   - pas de factorisation si $\Delta < 0$.

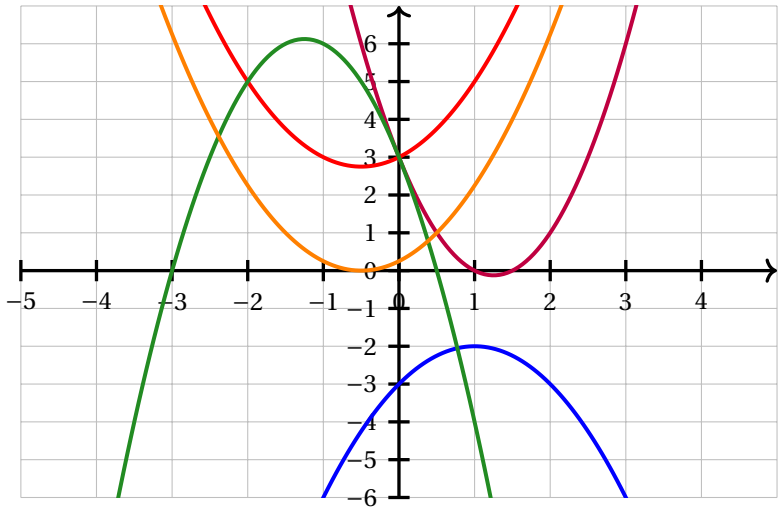


Exercice 3

On détermine les formes canoniques pour déterminer les tableaux de variations, et donc la courbe correspondante !

- $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2$ avec le sommet en $(1\,;-2)$.
- $f_2(x) = x^2 + x + 3 = (x+0{,}5)^2 + 2{,}75$ avec le sommet en $(-0{,}5\,;2{,}75)$.
- $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3 = -2(x-1{,}25)^2 - 0{,}125$ avec le sommet en $(1{,}25\,;-0{,}125)$.
- $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3 = -2(x+1{,}25)^2 + 6{,}125$ avec le sommet en $(-1{,}25\,;6{,}125)$.
- $f_5(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4} = (x+0{,}5)^2$ avec le sommet en $(-0{,}5\,;0)$.





$f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$
$f_2(x) = x^2 + x + 3$
$f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$
$f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$
$f_5(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

Exercice 4

1. Pour résoudre les équations suivantes, on les **transforme** pour se ramener à une équation que l'on sait résoudre :

   a. L'équation proposée ne peut pas (encore) être résolue (pb avec le « x^3 »), on transforme !
   $x^3 - 8x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8x + 18) = 0$ qui est une **équation produit** :
   - $x = 0$ ou
   - $x^2 - 8x + 18 = 0$ pour lequel $\Delta = -8$ donc pas de solution pour cette « partie »

   Ainsi $\mathcal{S} = \{0\}$.

   b. Pour la deuxième équation, on va utiliser le **produit en croix**, et on a une valeur interdite ($x = -1$).
   $\frac{x^2+2x+1}{x+1} = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = (2x-1)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0.$
   On a $\Delta = 9$ et les deux racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$ (valeur interdite !).
   Ainsi $\mathcal{S} = \{2\}$.

   c. $\frac{3x^2+10x+8}{x+2} = 2x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 = (x+2)(2x+5) \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 = 2x^2 + 9x + 10$

   $$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \text{ (avec } x \neq -2).$$

   On a $\Delta = 9$ et les deux racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ (valeur interdite !).
   Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

2. **a.** L'équation admet une seule racine (double) dans le cas où le discriminant est nul.
Et $\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \times 1 \times (m-1) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow -4m = -20 \Leftrightarrow m = 5$.

b. Dans ce cas, la racine (double) vaut $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$ (c'est l'identité remarquable $x^2 - 4x + 4$!)

3. **a.** 2 est solution de l'équation car $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.

b. La somme des racines vaut $-b/a = 5$ et le produit des racines vaut $c/a = -6$.

c. On a donc $x_1 = 2$ et donc $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 2 = 3$.

4. **a.** $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases} \Rightarrow x$ et y sont les racines de $X^2 - 18X + 65$.
On utilise Δ, et on trouve $x = 13$ et $y = 5$ (ou le contraire…)

b. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases} \Rightarrow x$ et y sont les racines de $X^2 - 4X + 5$.
On utilise Δ, et on ne trouve aucune solution…

Exercice 5

On pose x le côté du premier carré, de sorte qu'on cherche x tel que $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 15\,125$
Et $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 15\,125 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 15\,150 = 0$ qui donne $x = 70$ (l'autre solution est négative!).
De même, on cherche x tel que $3x^2 + 6x - 15\,122 = 0$ qui ne donne aucune solution entière!

Exercice 6

On détermine :

- l'aire totale du drapeau : $\mathcal{A}_T = 4 \times 3 = 12$;
- l'aire de la croix : $\mathcal{A}_C$ = (bde horiz)+(bde vert)−(petit carré du milieu en double) $= x \times 4 + x \times 3 - x^2 = -x^2 + 7x$.

On cherche donc x ($x \geqslant 0$) tel que $\mathcal{A}_C = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 7x = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 0$.
On obtient $\Delta = 25$ et la solution (positive) $x = 1$ (l'autre vaut -6!)
Donc la bande doit avoir une largeur de 1 m.

Exercice 7

Code Python

```python
def analysetrinome(a,b,c) :
    alpha = -b/(2*a)
    beta = a*alpha**2 + b*alpha + c
    print(f"Le sommet de la parabole a pour coordonnées ({alpha},{beta})")
    if a > 0 :
        print("La parabole est ouverte vers le haut")
    else :
        print("La parabole est ouverte vers le bas")
```

On peut vérifier sur SHELL `https://python.cpierquet.fr/?from=examples/2m2chap01exos.py` :

Début de la console python

```
>>> analysetrinome(-1,2,-3)
Le sommet de la parabole a pour coordonnées (1.0,-2.0)
La parabole est ouverte vers le bas
```

Fin de la console python

DOC 04

CH02 - Suites numériques

I. Définitions

I.1. Vocabulaire et notations

Définition

Une **suite numérique** est une liste (infinie) de nombres, appelés **termes**, qui sont ordonnés et numérotés.
Le premier terme d'une suite u se note u_1, le suivant u_2, … et plus généralement, le terme de rang n , appelé aussi **terme d'indice** n, se note u_n.
L'ensemble de tous ces termes, qui constitue la suite, est noté u ou plus souvent (u_n).

Remarques

- Une suite est en fait une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : à chaque entier n elle fait correspondre une et une seule image u_n
- Comme l'ensemble $\mathbb{N}$ a pour plus petit élément 0, il est très courant de noter u_0 le premier terme de la suite. En fonction des situations, on choisira de démarrer à u_1 ou u_0 (ou même encore d'autres indices) suivant ce qui sera le plus naturel.

I.2. Différents modes de définition

Cadre

Il existe plusieurs modes de génération d'une suite :

- Avec une formule de *récurrence* : Les termes sont définis *de proche en proche*. Une formule de récurrence explique comment passer d'un terme au suivant. C'est en général une relation entre deux termes consécutifs u_n et u_{n+1}. Dans ce cas, il faut également préciser la valeur et l'indice du premier terme de la suite. Pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence, il faut *a priori* d'abord calculer tous les termes précédents.
- Avec une formule *explicite* : Les termes ne dépendent que de leur rang n. On peut calculer n'importe quel terme directement. On se rapproche davantage de la notion de fonction qu'on a l'habitude d'utiliser. u_n est défini à partir d'une formule dépendant de n.

Méthode

Pour bien comprendre et étudier une suite, il est impératif de savoir avant tout si la suite est une suite **récurrente** ou une suite **explicite**. Les techniques d'étude ne seront pas les mêmes dans les deux cas.

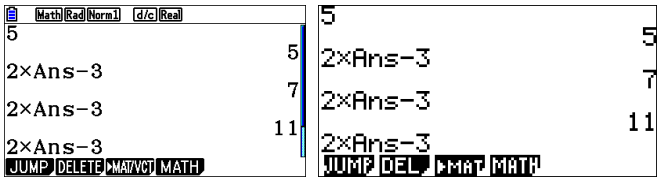
Exemples

- La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite **récurrente**.
  La formule explique que pour déterminer un terme de la suite, on prend le précédent et on le multiplie par 2 puis on soustrait 3 au résultat, et ainsi de suite en démarrant avec le nombre 5.
  $u_0 = 5$ d'après l'énoncé.
  $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$ et $u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11$ et $u_3 = 2 \times 11 - 3 = 19$ etc
- La suite (v_n) définie par $v_n = 2^n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **explicite**.
  La formule explique que, pour calculer le n-ième terme de cette suite, on élève 2 à la puissance n puis on soustrait 5. Il n'est pas nécessaire de connaître le terme précédent pour le calculer, seul son **rang** est nécessaire.
  $v_0 = 2^0 - 5 = 1 - 5 = -4$ et $v_1 = 2^1 - 5 = 2 - 5 = -3$ et $v_7 = 2^7 - 5 = 128 - 5 = 123$ etc

I.3. Méthodes de calculs

Calculatrice

À la calculatrice, on peut utiliser la touche Ans pour calculer les termes consécutifs de la suite :



Logiciel

On peut utiliser un tableur pour calculer les termes d'une suite (explicite ou non), grâce aux références des cellules puis à la poignée de recopie :

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	
3	1	
4	2	

formule explicite en fonction de A2…cellule à recopier

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	
3	1	
4	2	

terme initial

formule de récurrence en fonction de B2, cellule à recopier

Algorithme

On peut utiliser un algorithme, par exemple en python, pour calculer les termes d'une suite récurrente :

Code Python

```
def terme_un(n):
    u = ...                      # 1er terme de la suite
    for i in range(1,...) :      # i va de 1 à ...
        u = .........            # formule de récurrence
    return u
```

II. Représentation graphique

II.1. Cas général

Méthode

Pour représenter graphiquement une suite numérique (u_n), on dessine le **nuage de points** de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour n entier naturel. On trouve donc en **abscisses** les **rangs** n (entiers positifs) et en **ordonnées** les **termes** u_n.

Attention

Ces points ne doivent pas être reliés, contrairement à ce que l'on fait habituellement pour les fonctions. En effet, une fonction est définie sur un intervalle : entre deux valeurs de cet intervalle, on peut toujours en trouver une troisième. Par contre, entre deux nombres entiers consécutifs, il n'y a rien.

Remarque

Cette technique ne diffère pas vraiment de la technique habituelle pour représenter les fonctions : si la suite (u_n) est définie par une formule explicite du type $u_n = f(n)$, on peut tracer la courbe de la fonction f , puis y matérialiser les points d'abscisse entière!

II.2. Cas d'une suite récurrente

Idée

Dans le cas d'une suite récurrente, on utilise souvent une autre technique, qui a l'avantage de ne pas nécessiter le calcul des termes de la suite, et qui permet de visualiser rapidement certaines propriétés de la suite.

Méthode

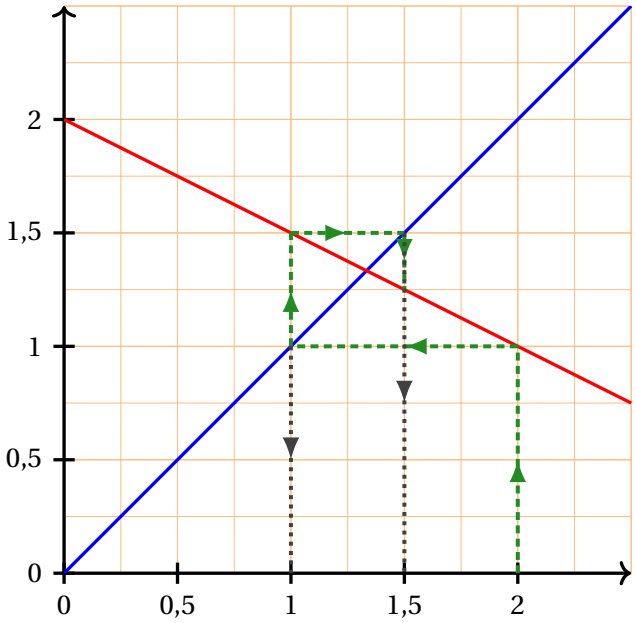
Dans le cas d'une suite récurrente définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut aussi la représenter sur un axe gradué, en général celui des abscisses :

- On cherche l'expression de la fonction f associée.
- On la représente dans un repère et on trace également la droite Δ d'équation $y = x$.
- On place le premier terme au niveau de sa valeur sur l'axe des abscisses.
- On cherche son image par la fonction f sur l'axe des ordonnées : c'est u_1.
- On ramène u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ.
- Et on recommence… on trace alors une « toile » en « escalier » ou en « escargot » qui permet de *conjecturer* beaucoup de choses concernant la suite (sens de variation, existence d'une valeur limite).

Exemple

Représenter graphiquement la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -0{,}5u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Illustration



III. Sens de variation

III.1. Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite :

- **Croissante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **Décroissante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **Constante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **Monotone** si elle ne change pas de sens de variation
- Dans tous les autres cas, on dira simplement que la suite n'est pas monotone.

Remarque

On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante, il suffit de changer l'inégalité large par une inégalité stricte !

III.2. Méthodes de recherche

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite :

- on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs ;
- on étudie son signe ;
- si la différence est toujours **positive**, alors la suite est **croissante** et si la différence est toujours **négative**, alors la suite est **décroissante**.

Remarques

Dans certains cas, on peut également utiliser d'autres méthodes :

- Si la suite est **explicite** du type $u_n = f(u_n)$, on peut étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
- Si la suite est une suite de termes **strictement positifs**, on peut aussi calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

IV. Compléments

IV.1. Limite d'une suite

Cadre

Il ne s'agit cette année que d'avoir une notion intuitive de ce qu'est la limite d'une suite.

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes lorsque le rang n devient très grand, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous avons vu sur des exemples que, dans certains cas, les termes de la suite semblent être de plus en plus proches d'une certaine valeur ℓ, on dit alors que la suite **converge** vers ℓ, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Dans d'autres cas, les termes semblent devenir aussi grands que l'on veut, à condition de choisir n assez grand. On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Une suite peut également diverger vers $-\infty$.

Il arrive aussi que la suite ne semble pas se rapprocher de quoi que ce soit en particulier et n'ait pas de limite. On dit alors aussi qu'elle est **divergente**.

IV.2. Suites et algorithmes

Cadre

Dans le cadre des suites, et tout particulièrement dans celui des suites *récurrentes*, on utilise beaucoup l'algorithmique. Les ALGO boucles permettent notamment de répéter une instruction (ou une liste d'instructions).
On distingue essentiellement :

- la boucle ALGO POUR ou ALGO FOR, pour répéter une instruction un **nombre donné de fois** ;
- la boucle ALGO TANT QUE ou ALGO WHILE, pour répéter une instruction **jusqu'à** une condition d'arrêt. (On parle aussi de *boucle conditionnelle*)

Un passage dans une boucle s'appelle une ALGO itération.
On utilise une boucle ALGO POUR quand on connaît à l'avance le nombre d'itérations à effectuer, une boucle ALGO TANTQUE sinon.

Python

La boucle ALGO POUR s'écrit dans ALGO python :

Code Python
```
# boucle pour
for <variable> in range(<première itération>,<dernière itération + 1>) :
    <instructions>
```

💣 Dans PY range on écrit la première valeur de PY i utilisée, et la première valeur de PY i non utilisée.

Python

La boucle ALGO TANTQUE s'écrit dans ALGO python :

Code Python
```
#boucle tantque
while <condition> :
    <instructions>
```

💣 La PY condition doit être vérifiée au départ pour qu'on entre dans la boucle.

Algorithme - Recherche du terme d'une suite récurrente

Pour calculer un terme donné d'une suite récurrente, on connaît le nombre d'itérations : on utilise donc une boucle ALGO POUR.
Le programme ALGO python ci-dessous permet de calculer les termes de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 300 \\ u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n \end{cases}$.

Code Python
```
def terme_un(n):
    u = 300                     # 1er terme de la suite
    for i in range(1,n+1) :     # i va de 1 à n
        u = 1.02 * u            # formule de récurrence
    return u
```

Pour calculer par exemple u_7, il suffira d'appeler dans la PY console :

Début de la console python
```
>>> terme_un(7)
344.6057002947841
```
Fin de la console python

Algorithme - Recherche d'un rang (algorithme de seuil)

Si on cherche le rang à partir duquel les termes d'une suite vérifient une certaine condition, on ne connait pas le nombre d'itérations à effectuer, donc on utilise une boucle `TANTQUE`.
À chaque itération, on teste la condition : *tant qu'elle est vraie, on continue à calculer* ; *dès qu'elle est fausse, on sort de la boucle.*
Par exemple,une somme de 300 € est placée à intérêts composés au taux de 2 % par an. On souhaite savoir pendant combien de temps laisser dormir cet argent pour disposer d'au-moins 350 €.

Code Python

```
1  def seuil(S) :
2      n = 0                    # rang initial
3      u = 300                  # 300€ disponibles
4      while u < S :            # tant qu'on a moins de S euros
5          u = 1.02 * u         # on ajoute 2%
6          n = n + 1            # on incrémente
7      return n,u               # on renvoie le rang et la somme
```

Pour savoir quand on atteindra 350 € sur le compte, il suffira d'appeler dans la `console` :

Début de la console python

```
>>> seuil(350)
(8, 351.4978143006798)
```

Fin de la console python

On sait donc qu'il faudra attendre 8 ans et qu'on disposera alors de $u_8 \approx 351{,}50$ €. (On remarquera qu'on avait bien trouvé $u_7 < 350$ avec le programme précédent.)

Algorithme - Recherche de la somme des termes d'une suite

Si on veut additionner tous les premiers termes d'une suite avec un programme, il faut calculer la somme *au fur et à mesure* car les termes sont écrasés d'une itération à l'autre.
Par exemple, si on veut calculer la somme de tous les carrés parfaits jusqu'à un rang n, autrement dit la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, on peut utiliser :

Code Python

```
1  def somme_carres(n) :
2      u = 1                        # le 1er carré vaut 1
3      s = 1                        # la somme aussi
4      for i in range(2,n+1) :      # i va de 2 à n
5          u = i**2                 # u_i = i²
6          s = s + u                # on augmente la somme partielle de u
7      return s                     # on affiche la somme complète
```

Dans la console ci-dessous, on voit que la somme des trois premiers carrés est $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, mais aussi que la somme des carrés jusqu'à 100^2 est égale à 338 350, tout aussi rapidement :

Début de la console python

```
>>> somme_carres(3)
14
>>> somme_carres(100)
338350
```

Fin de la console python

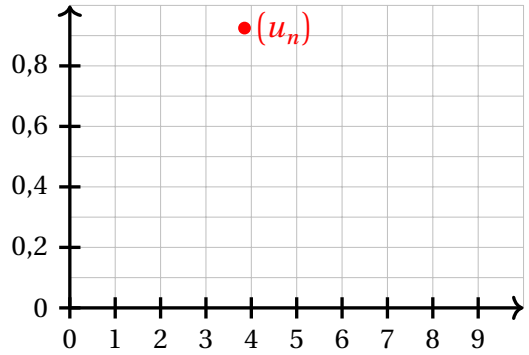
On peut bien sûr calculer aussi la somme des termes d'une suite récurrente en écrivant la formule adéquate pour calculer u_i à la ligne `5`.

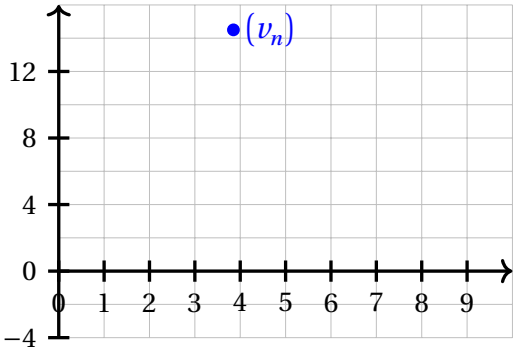
IV.3. Suites et Représentations graphiques

Manipulations - Suites explicites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 0{,}25n^2 - n$ définies sur $\mathbb{N}$.
À l'aide de la calculatrice, et notamment du module `Suites`, représenter graphiquement (nuage de points) les 10 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

Illustrations - Suites explicites





Manipulation - Suite récurrente

On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier n.

- Calculer les 10 premières termes de (u_n) et représenter graphiquement son nuage de points (graph. v1).
- En utilisant la technique de la « toile d'araignée », représenter les premiers termes de (u_n) (graph. v2).

Illustration - Suite récurrente (v1)

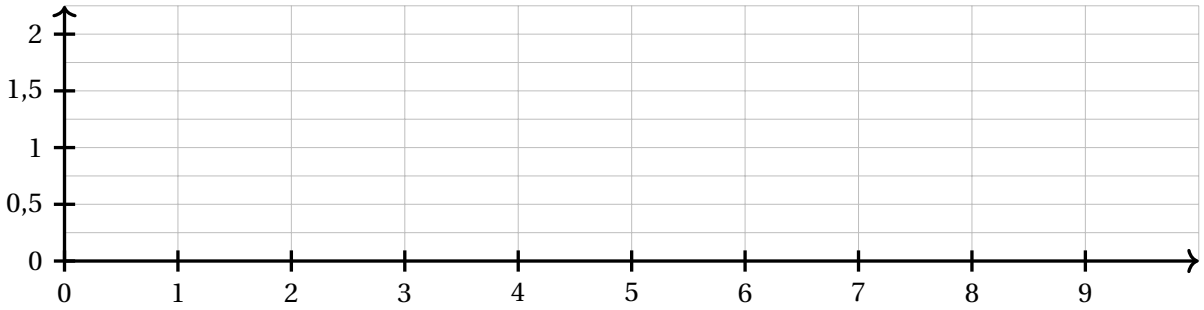
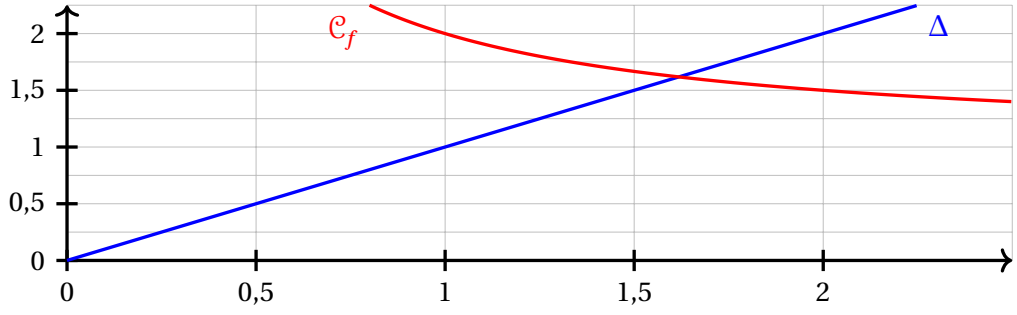


Illustration - Suite récurrente (v2)



IV.4. Point histoire

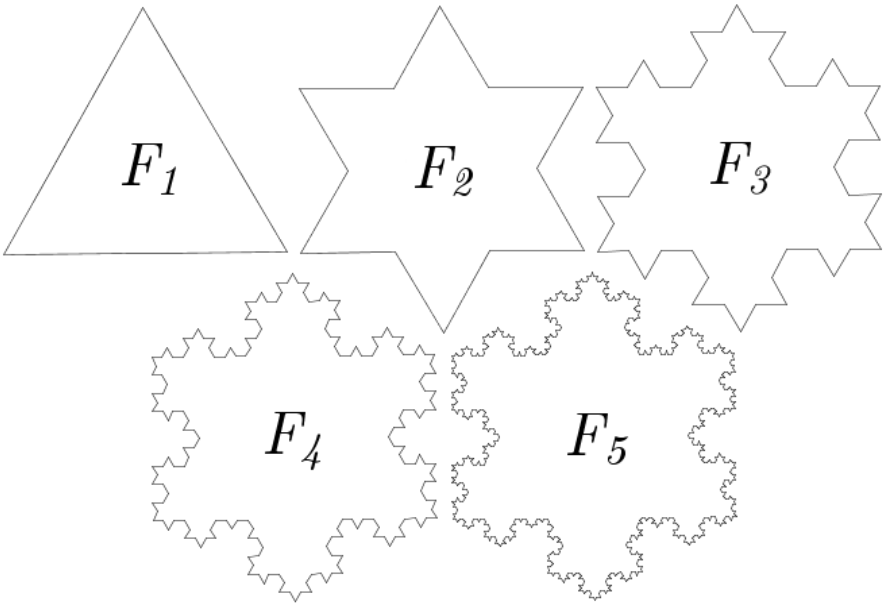
Point histoire - Source Wikipedia

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des *procédés illimités* de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au I^{er} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV^{e} siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval).

C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions. Dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.



DOC 05

CH02 - Suites numériques - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^3 + 3n - 1$ pour tout entier n.

1. Calculer u_0 puis u_1.
2. Calculer la valeur de u_{10}.
3. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-3}{n+2}$ pour tout entier n.

1. Calculer u_0 puis u_1.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Calculer la valeur de u_{50}.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout entier n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Déterminer, en utilisant le module CALC Suites de la calculatrice, la valeur de u_{15}.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n^2 + 1}$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou par une formule explicite ?
3. Déterminer la fonction f associée à la suite (u_n).
4. Déterminer, en utilisant le module CALC Suites de la calculatrice, la valeur de u_{20}.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = n - u_n$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2.
2. Déterminer, en utilisant le module CALC Suites de la calculatrice, la valeur de u_{18}.

Exercice 6

On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)v_n}{n(1+v_n)}$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de v_2, v_3 et v_4.
2. Déterminer, en utilisant le module CALC Suites de la calculatrice, la valeur de v_{11}.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout entier n.

1. Calculer les valeurs de v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Démontrer que $v_{2n} > 0$ pour tout entier n, et que $v_{2n+1} < 0$ pour tout entier n.

Exercice 8

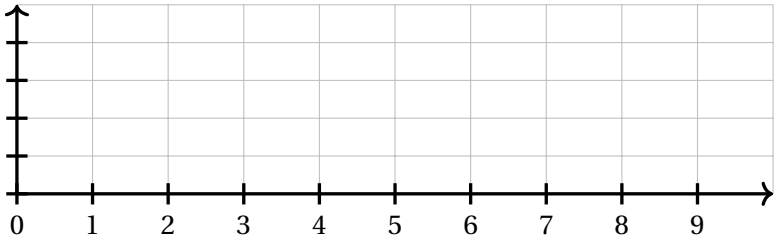
On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{2}{5^n}$ pour tout entier n.

1. Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3.
2. Montrer que le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ est indépendant de n pour tout entier n.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) ainsi que le $15^{\text{ème}}$.
2. Représenter, dans le repère suivant (l'unité verticale est à préciser), les 10 premiers termes de (u_n).

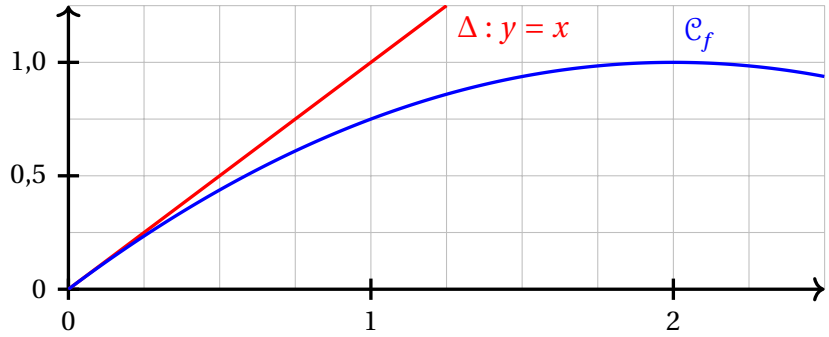


3. Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite éventuelle de la suite (u_n).
4. **a.** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{n(n+1)}$ pour tout entier n non nul.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier n non nul (on dit que (u_n) est **minorée** par 1).

Exercice 10

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = -0{,}25v_n^2 + v_n$ pour tout entier n.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. **a.** Déterminer la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.
   b. À l'aide de la courbe $\mathcal{C}_f$ donnée ci-dessous, représenter graphiquement les premiers termes de (v_n).



   c. Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite éventuelle de la suite (v_n).
3. Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel n puis en déduire le sens de variation de la suite (v_n).

DOC 06

CH02 - Suites numériques - Exercices (Correction)

Exercice 1

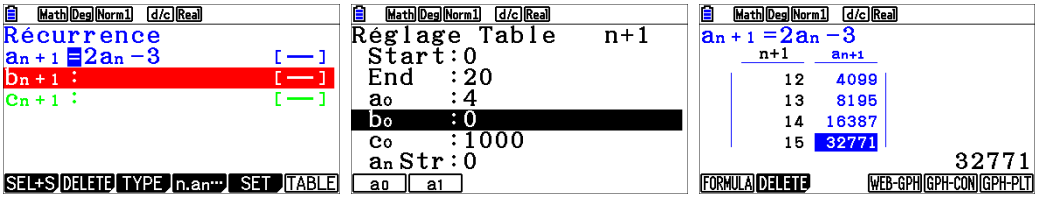
1. On a (formule explicite) $u_0 = 0^3 + 3 \times 0 - 1 = -1$ et $u_1 = 1^3 + 3 \times 1 - 1 = 3$.
2. On a, de même, $u_{10} = 10^3 + 3 \times 10 - 1 = 1\,029$.
3. • On a $u_n + 1 = n^3 + 3n - 1 + 1 = n^3 + 3n$;
   • $u_{n+1} = (n+1)^3 + 3(n+1) - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n + 3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 6n$. (qui est différent de $u_n + 1$!)

Exercice 2

1. On a (formule explicite) $u_0 = \dfrac{0-3}{0+2} = -1{,}5$ et $u_1 = \dfrac{1-3}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$.
2. La suite (u_n) est définie par une formule explicite.
3. La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ (on remplace n par x !).
4. On a $u_{50} = \dfrac{50-3}{50+2} = \dfrac{47}{52}$.

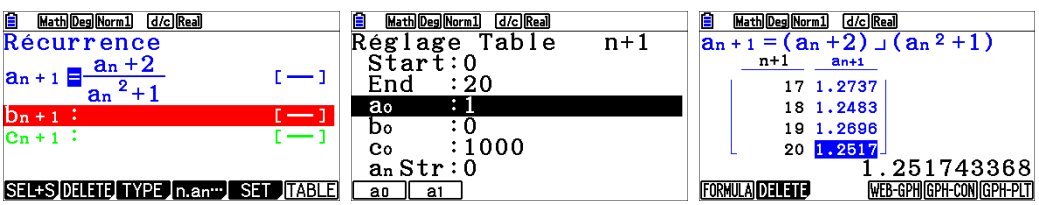
Exercice 3

1. On a (formule de récurrence) :
   • $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$;
   • $u_2 = 2u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$.
2. La suite (u_n) est définie par récurrence.
3. La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = 2x - 3$ (on remplace u_n par x !).
4. Le module Suites de la calculatrice donne $u_{15} = 32\,771$.



Exercice 4

1. On a (formule de récurrence) :
   • $u_1 = \dfrac{u_0 + 2}{u_0^2 + 1} = \dfrac{1+2}{1^2+1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$;
   • $u_2 = \dfrac{u_1 + 2}{u_1^2 + 1} = \dfrac{1{,}5+2}{1{,}5^2+1} = \dfrac{14}{13}$.
2. La suite (u_n) est définie par récurrence.
3. La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$ (on remplace u_n par x !).
4. Le module Suites de la calculatrice donne $u_{20} \approx 1{,}2517$ (arrondi à 10^{-4}).



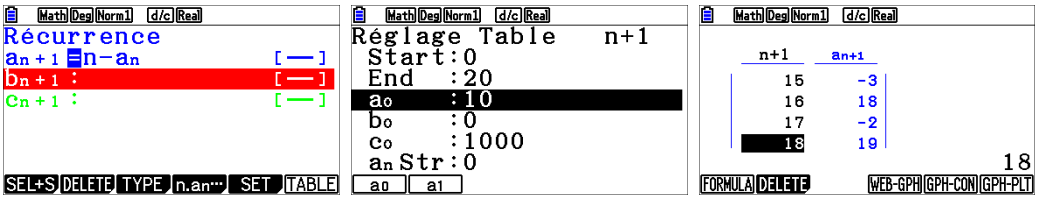
Exercice 5

1. Il s'agit d'une suite récurrente « non classique » pour laquelle il faut respecter la concordance d'indice !

   $u_{n+1} = n - u_n$:

   - $u_1 = u_{0+1} = 0 - u_0 = 0 - 10 = -10$;
   - $u_2 = u_{1+1} = 1 - u_1 = 1 - (-10) = 11$.

2. Le module Suites de la calculatrice donne $u_{18} = 19$.



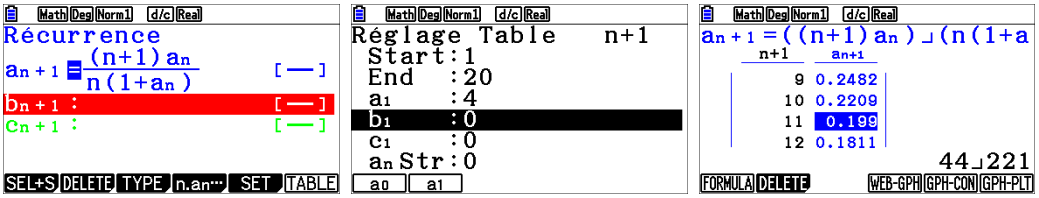
Exercice 6

1. Il s'agit d'une suite récurrente « non classique » pour laquelle il faut respecter la concordance d'indice !

   $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)v_n}{n(1+v_n)}$:

   - $v_2 = v_{1+1} = \dfrac{(1+1)v_1}{1(1+v_1)} = \dfrac{2v_1}{1(1+v_1)} = \dfrac{2\times 4}{1+4} = 1{,}6$;
   - $v_3 = v_{2+1} = \dfrac{(2+1)v_2}{2(1+v_2)} = \dfrac{3v_2}{2(1+v_2)} = \dfrac{12}{13}$;
   - $v_4 = v_{3+1} = \dfrac{(3+1)v_3}{3(1+v_3)} = \dfrac{4v_3}{3(1+v_3)} = 0{,}64$.

2. Le module Suites de la calculatrice donne $v_{11} = \dfrac{44}{221} \approx 0{,}199$ (arrondi au millième).



Exercice 7

1. On a $v_0 = \dfrac{(-1)^0}{0+1} = 1$ et $v_1 = \dfrac{(-1)^1}{1+1} = -0{,}5$ et $v_2 = \dfrac{(-1)^2}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ et $v_3 = \dfrac{(-1)^1}{3+1} = -0{,}25$ et $v_4 = \dfrac{(-1)^4}{4+1} = 0{,}2$.
2. On a :

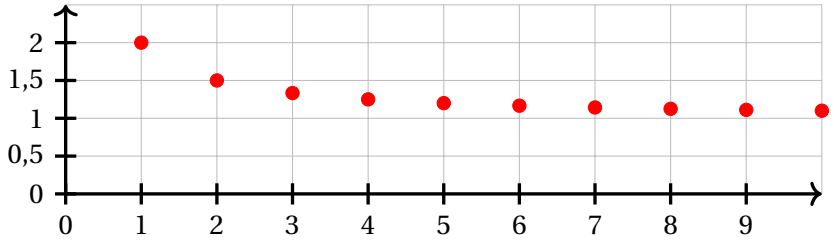
   - $v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)+1} = \dfrac{1}{2n+1} > 0$;
   - $v_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} = \dfrac{-1}{2n+2} < 0$.

Exercice 8

1. On a (formule explicite) $w_0 = \dfrac{2}{5^0} = 2$ et $w_1 = \dfrac{2}{5^1} = 0{,}4$ et $w_2 = \dfrac{2}{5^2} = 0{,}08$ et $w_3 = \dfrac{2}{5^3} = 0{,}016$.
2. On a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\frac{2}{5^{n+1}}}{\frac{2}{5^n}} = \dfrac{2}{5^{n+1}} \times \dfrac{5^n}{2} = \dfrac{5^n}{5^{n+1}} = \dfrac{5^n}{5^n \times 5} = \dfrac{1}{5}$ qui est bien indépendant de n !

Exercice 9

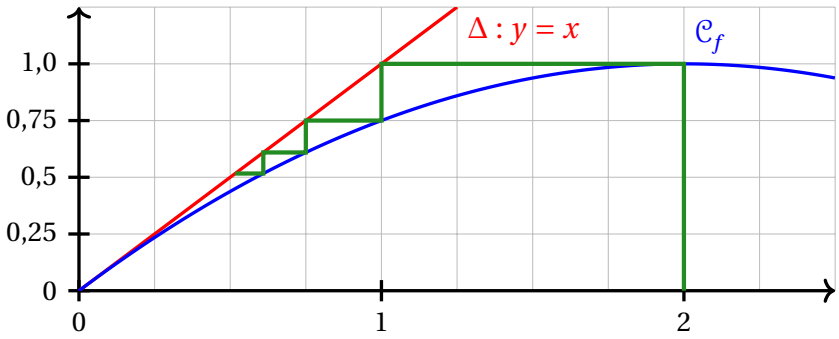
1. On a (formule explicite) $u_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$ et $u_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = 1{,}5$ et $u_3 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ puis $u_{15} = 1 + \dfrac{1}{15} = \dfrac{16}{15}$.
2. On représente le nuage de points :



3. On peut conjecturer que (u_n) est monotone décroissante et convergente vers $\ell = 1$.
4. **a.** On a $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n}{n(n+1)} - \dfrac{n+1}{n(n+1)} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$.
   b. par quotient, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ (pour tout n non nul), ce qui justifie que (u_n) est monotone décroissante.
5. Sachant que $\dfrac{1}{n} > 0$, on en déduit que $u_n > 1$ pour tout entier n non nul.

Exercice 10

1. On a (formule de récurrence) :
   - $v_1 = -0{,}25v_0^2 + v_0 = -0{,}25 \times 2^2 + 2 = 1$;
   - $v_2 = -0{,}25v_1^2 + v_1 = -0{,}25 \times 1^2 + 1 = 0{,}75$;
   - $v_3 = -0{,}25v_2^2 + v_2 = -0{,}25 \times 0{,}75^2 + 0{,}75 = \dfrac{39}{64} = 0{,}609\,375$.
2. **a.** La fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$ est $f(x) = -0{,}25x^2 + x$ (on remplace u_n par x !).
   b. À l'aide de la technique de la « toile » :



   c. On peut conjecturer que (v_n) est monotone décroissante et convergente vers $\ell = 0$.
3. On a $v_{n+1} - v_n = -0{,}25v_n^2 + v_n - v_n = -0{,}25v_n^2 < 0$ pour tout entier naturel n, donc on en déduit que (v_n) est décroissante.

DOC 07

CH03 - Droites et fonctions affines

I. Généralités

I.1. Définition

Définition

Une fonction f est **affine** s'il existe deux réels m et p tels que $f(x) = mx + p$.
Son programme de calcul ne comporte qu'une multiplication (ou division) et une addition (ou soustraction).

Remarques

- On utilise aussi souvent les notations $f(x) = ax + b$, qui sont parfois plus ambigües.
- Si $m = 0$, la fonction est **constante**.
- Si $p = 0$, la fonction est **linéaire** et traduit une situation de proportionnalité.

I.2. Représentation graphique

Propriété

La courbe représentative d'une fonction affine $f(x) = mx + p$ est toujours une **droite**.
L'équation réduite de cette droite est $y = mx + p$.
La constante **multiplicative** m est la **pente** de la droite (appelée aussi **coefficient directeur**).
La constante **additive** p s'appelle **ordonnée à l'origine** : c'est la valeur en laquelle la droite traverse l'axe des ordonnées.

Remarque

Inversement, une droite non verticale est toujours la représentation graphique d'une fonction affine.

Propriété

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points d'une droite, alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$ (compter les déplacements en *unités* et pas en carreaux)

Méthode

Pour **lire l'équation d'une droite**, il suffit de trouver p et m :

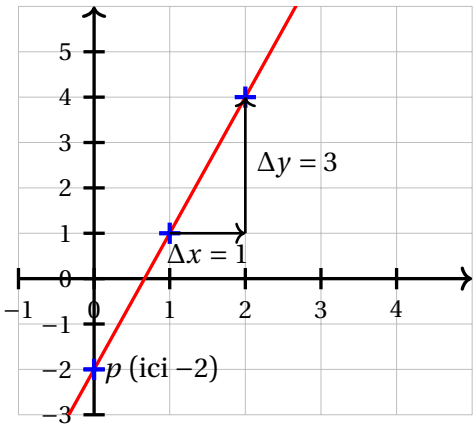
- On repère l'ordonnée à l'origine p, c'est-à-dire la valeur où la droite traverse l'axe des ordonnées
- On repère deux points de la droite assez éloignés et dont les coordonnées sont les plus précises possibles et on calcule m avec la formule $m = \dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Exemple

La droite tracée ci-dessous est la droite d'équation $y = 3x - 2$.
En effet :

- la droite traverse l'axe des ordonnées en -2 donc $p = -2$;
- quand on se décale de $\Delta x = 1$ unité vers la droite, on se décale de $\Delta y = 3$ unités vers le haut donc $m = \dfrac{3}{1} = 3$.

Illustration



Algorithme

En python, on peut créer une `fonction` permettant de calculer les valeurs de m et de p :

Code Python

```
1  from math import *
2  def eqdroite(xA,yA,xB,yB) :
3      if xA == xB :              #la droite est verticale !
4          return None
5      m = (yB-yA)/(xB-xA)
6      p = yB - m*xB
7      return m,p
```

Début de la console python

```
>>> eqdroite(1,1,2,4) #droite passant par (1,1) et (2,4)
(3.0, -2.0)
```

Fin de la console python

Remarque

On peut également travailler de manière algébrique pour déterminer p (si on connaît m) grâce à :

- $p = y_A - m \times x_A$;
- $p = y_B - m \times x_B$;

I.3. Tracé

Méthode 1

Pour **tracer** la droite représentative d'une fonction affine (ou une droite d'équation donnée) :

- On choisit deux valeurs x_A et x_B assez éloignées
- On calcule les images $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$
- On place les points A et B correspondants et on trace à la règle la droite (AB).

Méthode 2

Pour **tracer** la droite représentative d'une fonction affine (ou une droite d'équation donnée) :

- On place le point d'ordonnée p sur l'axe des ordonnées.
- Depuis ce point, on se décale de 1 unité en abscisse, puis de m unités en ordonnées : on obtient un deuxième point de la droite (et éventuellement on recommence).
- On relie ces points à la règle.

II. Sens de variations, signe d'une fonction affine

II.1. Sens de variation

Propriété

Une fonction affine est toujours **monotone**, et son sens de variation est donné par le **signe** de son coefficient directeur m :

- Si m est **positif**, la fonction est **croissante**.
- Si m est **négatif**, la fonction est **décroissante**.

Algorithme

En python, on peut créer une `fonction` permettant de retourner le sens de variation d'une fonction affine :

Code Python

```
1  from math import *
2  def variation(m,p):
3      if m == 0 :
4          var = "constante"
5      elif m>0 :
6          var = "croissante"
7      else :
8          var = "décroissante"
9      return var
```

Début de la console python

```
>>> variation(2,3), variation(-2,-1), variation(0,3)
('croissante', 'décroissante', 'constante')
```

Fin de la console python

II.2. Signe

Propriété

Si une fonction affine f n'est pas constante, sa droite représentative n'est pas horizontale donc elle traverse toujours une seule fois l'axe des abscisses. On trouve cette racine en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

Méthode

Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine :

- On cherche sa racine en résolvant $f(x) = 0$.
- Pour trouver le signe de $f(x)$ de part et d'autre de cette racine, on regarde le signe de m, qui donne les variations de f : si elle est croissante, elle ira du $\ominus$ vers le $\oplus$ et si elle est décroissante, elle ira du $\oplus$ vers le $\ominus$.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ tracée ci-dessus a pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

En effet, elle s'annule lorsque $3x - 2 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = 2/3$.
La pente de la droite est $m = 3$ qui est positif, donc elle est croissante et va du $\ominus$ vers le $\oplus$.

Remarques

Si une fonction affine est constante, elle est toujours du même signe, celui de p !

Le fait de savoir déterminer le tableau de signes d'une fonction « du premier degré » permet, grâce à un tableau de signes, de pouvoir déterminer le signe d'une fonction se présentant sous la forme :
d'un ensemble de produit(s)/quotient(s) de facteurs du 1er degré.

Algorithme

En python, on peut créer une préocédure permettant d'afficher le signe de $mx+p$:

Code Python

```
1  from math import *
2  def signe(m,p) :
3      if m==0 :
4          if p>=0 :
5              signe = '+'
6          else :
7              signe = '-'
8          print(f"mx+p est du signe de p, soit ici {signe}")
9      elif m>0 :
10         racine , signe = -p/m , '-0+'
11         print(f"mx+p s'annule en {racine} et son signe est {signe}")
12     else :
13         racine , signe = -p/m , '+0-'
14         print(f"mx+p s'annule en {racine} et son signe est {signe}")
```

Début de la console python

```
>>> signe(2,3)
mx+p s'annule en -1.5 et son signe est -0+
>>> signe(-2,-1)
mx+p s'annule en -0.5 et son signe est +0-
>>> signe(0,5)
mx+p est du signe de p, soit ici +
```

Fin de la console python

III. Compléments - Tableaux de signes, inéquations

Rappels

Pour créer le **tableau de signes** d'une expression, il faut très souvent penser à respecter une règle essentielle (*règle des signes*) : l'expression doit se présenter sous forme de produit(s)/quotient(s).

Si ce n'est pas le cas, on peut essayer de *transformer* pour se ramener à la configuration produit(s)/quotient(s). Pour cela il existe deux **techniques** de base : **factoriser** et/ou **mettre au même dénominateur**.

Rappels

Pour résoudre une inéquation, on peut travailler en utilisant un tableau de signes. Toutefois, avant de se lancer directement dans la création du tableau, il faut s'assurer qu'on cherche à résoudre « plus grand ou plus petit que **0** ! »

Si ce n'est pas le cas, on commence déjà par se ramener à : « $\geqslant 0$ », « $\leqslant 0$ », « >0 » ou « <0 ».

On peut ensuite de reporter au point précédent, et se ramener (si besoin) à une forme produit(s)/quotient(s).

On peut retenir cette méthode grâce à l'acronyme **ZPQ** : **Z**éro & **P**roduit & **Q**uotient.

DOC 08

CH03 - Droites et fonctions affines - Exercices

Exercice 1

Soit (d) la droite d'équation $y = 1{,}5x + 5{,}5$.

1. Déterminer le sens de variations de la droite (d).
2. Montrer que le point A$(1\,;\,7)$ appartient à (d).
3. Déterminer la valeur de a pour que le point B$(a\,;\,8)$ appartienne à (d).
4. Le point C$(3{,}5\,;\,11{,}5)$ appartient-il à (d) ? Justifier.

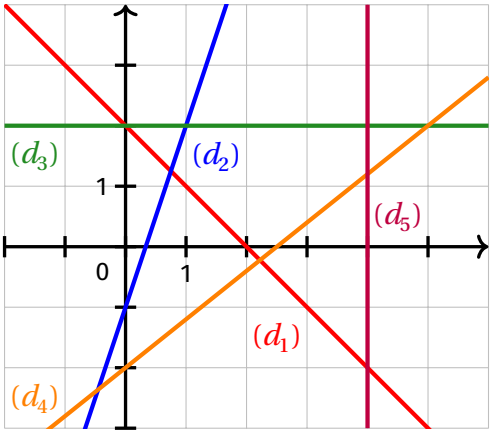
Exercice 2

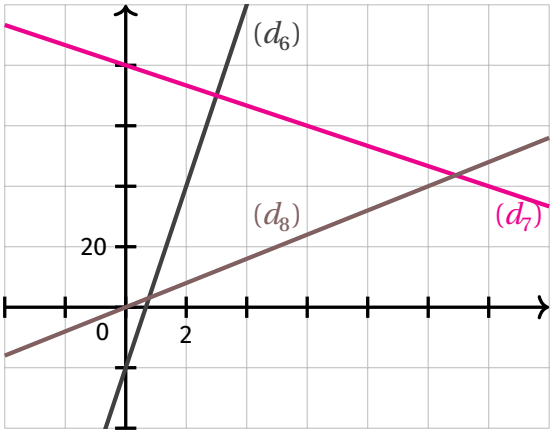
Pour chacune des fonctions affines suivantes, déterminer son sens de variations, sa racine et son tableau de signes.

1. $f_1(x) = 4x - 8$;
2. $f_2(x) = -x + 5$;
3. $f_3(x) = 3x + 5$;
4. $f_4(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}$.

Exercice 3

1. a. Dans un repère orthogonal, placer les points A$(-1\,;\,-1)$, B$(1\,;\,3)$ et C$(2\,;\,2)$.
   b. Tracer les droites (AB), (AC) et (BC) puis déterminer leur équation.
2. Déterminer par lecture graphique une équation de chacune des droites tracées :





Exercice 4

Dans un repère orthogonal, on considère les points K$(10\,;\,15{,}75)$ et L$(100{,}4\,;\,65{,}47)$.

1. Déterminer, par calculs, une équation de la droite (KL).
2. Le point de coordonnées $(50\,;\,37{,}85)$ appartient-il à la droite (KL) ? Justifier.

Exercice 5

On considère les points A(1 ; 2), B(2 ; 8) et C(5 ; 26).

1. **a.** Montrer que le coefficient directeur de (AB) vaut 6.
   b. Calculer le coefficient directeur de la droite (AC).
   c. Déterminer une équation de la droite (AB).
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 6

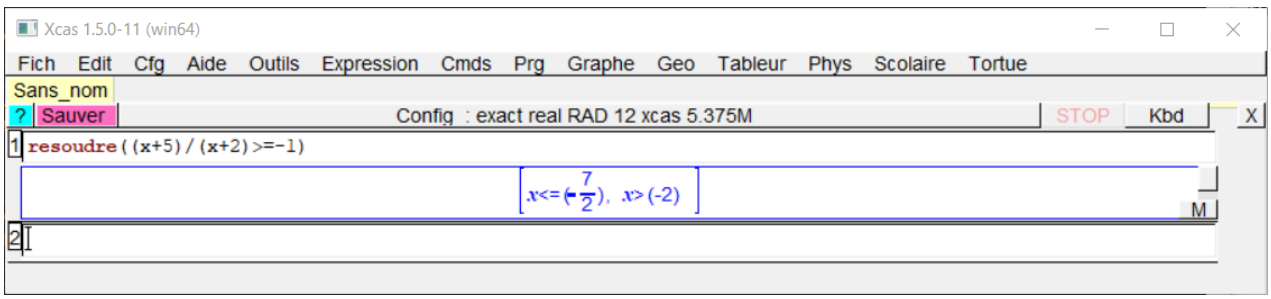
1. Donner le tableau de signes des expressions suivantes :
   a. $(x-3)(2x-4)$;
   b. $-x(3x+4)$;
   c. $(x-2)(x+5)(7-7x)$;
   d. $\dfrac{2x+1}{(x-5)(x-1)}$;
   e. $\dfrac{-7(x+2)}{5-2x}$; *Ne pas oublier le -7 qui est « toujours négatif »*
   f. $\dfrac{x^2+3}{(x-1)(x+4)}$. *On pourra utiliser le fait qu'un « carré est toujours positif ! »*
2. Donner, après avoir *transformé* si besoin, le tableau de signes des expressions suivantes :
   a. $(x-3)(x-1)-2(x-3)(4x-7)$
   b. $3-\dfrac{5+x}{7x-13}$
   c. $x(x+2)(x-3)^2$

Exercice 7

1. Résoudre (directement avec un tds), les inéquations suivantes :
   a. $(x-3)(2x+4)\geqslant 0$;
   b. $3x(x+1)(7+x)<0$;
   c. $\dfrac{x+3}{2x+8}\leqslant 0$;
   d. $\dfrac{x(x+2)}{x+1}>0$.
2. Résoudre, en transformant si besoin, les inéquations suivantes :
   a. $7x+3\leqslant 2$;
   b. $(x+1)(x-2)<(x+1)(4x+5)$;
   c. $\dfrac{x+1}{x+2}<2$.

Exercice 8

Retrouver, par « calculs » le résultat donné par Xcas, logiciel de calcul formel :



DOC 09

CH03 - Droites et fonctions affines - Exercices (Correction)

Exercice 1

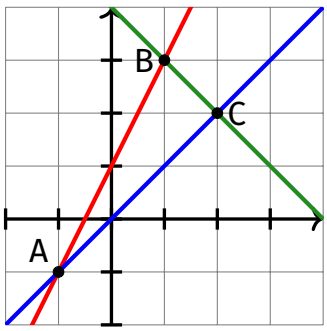
1. La droite (d) est croissante car sa pente $(m = 1{,}5)$ est strictement positive.
2. Le point $A(1\ ;\ 7)$ appartient à (d) car $1{,}5 \times 1 + 5{,}5 = 7$.
3. Le point $B(a\ ;\ 8)$ appartient à (d) si et seulement si $1{,}5 \times a + 5{,}5 = 8$. On résout et on obtient $a = \dfrac{5}{3}$.
4. Le point $C(3{,}5\ ;\ 11{,}5)$ n'appartient pas à (d) car $1{,}5 \times 3{,}5 + 5{,}5 = 10{,}75 \neq 11{,}5$.

Exercice 2

1. $f_1(x) = 4x - 8$:
   - est croissante car $m = 4 > 0$;
   - s'annule en $x = 2$;
   - est de signe $\ominus 0 \oplus$.
2. $f_2(x) = -x + 5$:
   - est décroissante car $m = -1 < 0$;
   - s'annule en $x = 5$;
   - est de signe $\oplus 0 \ominus$.
3. $f_3(x) = 3x + 5$:
   - est croissante car $m = 3 > 0$;
   - s'annule en $x = -5/3$;
   - est de signe $\ominus 0 \oplus$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}$:
   - est décroissante car $m - 2/3 < 0$;
   - s'annule en $x = 3/8$;
   - est de signe $\oplus 0 \ominus$.

Exercice 3

1. **a.** On place les points $A(-1\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(2\ ;\ 2)$:



   b. On lit – graphiquement (!) – que :
   - (AB) : $y = 2x + 1$;
   - (AC) : $y = x$;
   - (BC) : $y = -x + 4$.

2. Par lectures graphiques :

- $(d_1) : y = -x + 2$;
- $(d_2) : y = 3x - 1$;
- $(d_3) : y = y = 2$;
- $(d_4) : y = 0{,}8x - 2$;
- $(d_5) : x = 4$;
- $(d_6) : y = 30x - 20$;
- $(d_7) : y = -\frac{10}{3}x + 80$;
- $(d_8) : y = 4x$.

Exercice 4

1. Par calculs :

- $m = \dfrac{\text{DV}}{\text{DH}} = \dfrac{y_\text{L} - y_\text{K}}{x_\text{L} - x_\text{K}} = \dfrac{65{,}47 - 15{,}75}{100{,}4 - 10} = 0{,}55$;
- ainsi (KL) : $y = 0{,}55x + p$;
- avec K, on obtient $0{,}55 \times 10 + p = 15{,}75 \Rightarrow p = 15{,}75 - 0{,}55 \times 10 = 10{,}25$.

Ainsi on obtient (KL) : $y = 0{,}55x + 10{,}25$.

2. Le point de coordonnées (50 ; 37,85) n'appartient pas à la droite (KL) car $0{,}55 \times 50 + 10{,}25 = 37{,}74 \neq 37{,}85$.

Exercice 5

1. **a.** Le coefficient directeur de (AB) vaut $m_{(\text{AB})} = \dfrac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} = \dfrac{8-2}{2-1} = 6$.

b. Le coefficient directeur de la droite (AC) est $m_{(\text{AC})} = \dfrac{y_\text{C} - y_\text{A}}{x_\text{C} - x_\text{A}} = \dfrac{26-2}{5-1} = 6$.

c. Une équation de (AB) est $y = 6x - 4$ (car $p = 2 - 6 \times 1$).

2. On va regarder si C appartient à la droite (AB) : $6 \times 5 - 4 = 26$ ✓.

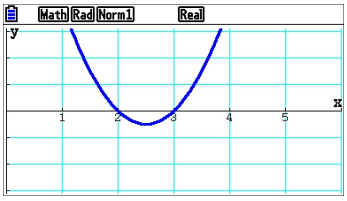
Donc les points A, B et C sont bien alignés.

Exercice 6

1. Les expressions suivantes sont bien sous forme de produit(s)/quotient(s), donc tds ok :

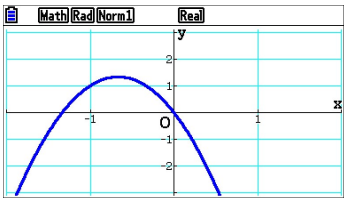
a. $(x-3)(2x-4)$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$		$m = 1 \oplus$
$(2x-4)$		$-$	0	$+$		$+$		$m = 2 \oplus$
expr		$+$	0	$-$	0	$+$		



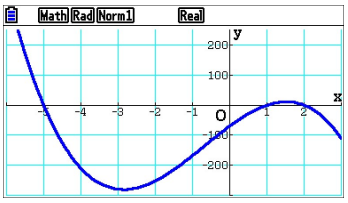
b. $-x(3x+4)$:

x	$-\infty$		$-4/3$		0		$+\infty$	
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$m=-1\ominus$
$(3x+4)$		$-$	0	$+$		$+$		$m=3\oplus$
expr		$-$	0	$+$	0	$-$		



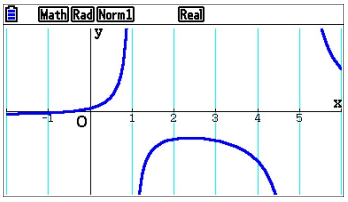
c. $(x-2)(x+5)(7-7x)$:

x	$-\infty$		-5		1		2		$+\infty$	
$(x-2)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$m=1\oplus$
$(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$m=1\oplus$
$(7-7x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$m=-7\ominus$
expr		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		



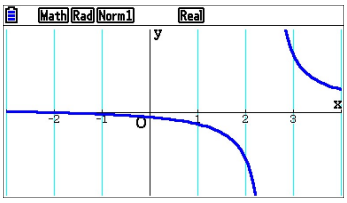
d. $\dfrac{2x+1}{(x-5)(x-1)}$:

x	$-\infty$		$-0{,}5$		1 D		5 D		$+\infty$	
$(2x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$m=2\oplus$
$(x-5)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$m=1\oplus$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$m=1\oplus$
expr		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$		



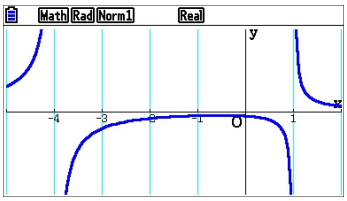
e. $\dfrac{-7(x+2)}{5-2x}$:

x	$-\infty$		-2		$2{,}5$ (D)		$+\infty$
-7		$-$		$-$		$-$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	$m=1\oplus$
$(5-2x)$		$+$		$+$	0	$-$	$m=-2\ominus$
expr		$+$	0	$-$	‖	$+$	



f. $\dfrac{x^2+3}{(x-1)(x+4)}$:

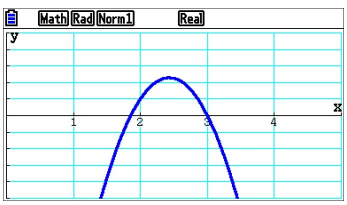
x	$-\infty$		-4 (D)		1 (D)		$+\infty$
(x^2+3)		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	$m=1\oplus$
$(x+4)$		$-$	0	$+$		$-$	$m=1\oplus$
expr		$+$	‖	$-$	‖	$+$	



2. On utilise, ci-besoin, les techniques habituelles pour transformer

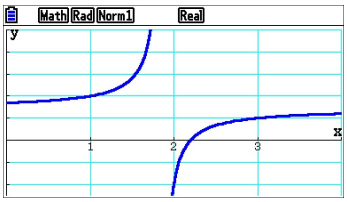
a. $(x-3)(x-1)-2(x-3)(4x-7)=(x-3)\left[(x-1)-2(4x-7)\right]=(x-3)(x-1-8x+14)=(x-3)(-7x+13)$:

x	$-\infty$		$13/7$		3		$+\infty$
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	$m=1\oplus$
$(-7x+13)$		$+$	0	$-$		$-$	$m=-7\ominus$
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	



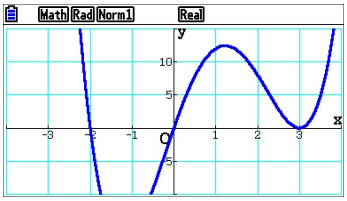
b. $3-\dfrac{5+x}{7x-13}=\dfrac{3(7x-13)}{7x-13}-\dfrac{5+x}{7x-13}=\dfrac{21x-39-5-x}{7x-13}=\dfrac{20x-44}{7x-13}$:

x	$-\infty$		$13/7$ D		$11/5$		$+\infty$	
$(20x-44)$		$-$		$-$	0	$+$		$m=20\oplus$
$(7x-13)$		$-$	0	$+$		$+$		$m=7\oplus$
expr		$+$	‖	$-$	0	$+$		



c. $x(x+2)(x-3)^2=x(x+2)(x-3)(x-3)$:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$m=1\oplus$
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$m=1\oplus$
$(x-3)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$m=1\oplus$
$(x-3)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$m=1\oplus$
expr		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$		



Exercice 7

1. On peut résoudre, à l'aide d'un tds :

a. $(x-3)(2x+4)\geqslant 0$ donne $\mathcal{S}=\left]-\infty;-2\right]\cup\left[3;+\infty\right[$.

b. $3x(x+1)(7+x)<0$ donne $\mathcal{S}=\left]-\infty;-7\right[\cup\left]-1;0\right[$.

c. $\dfrac{x+3}{2x+8}\leqslant 0$ donne $\mathcal{S}=\left]-4;-3\right]$.

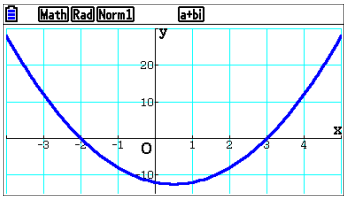
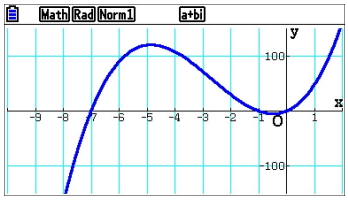
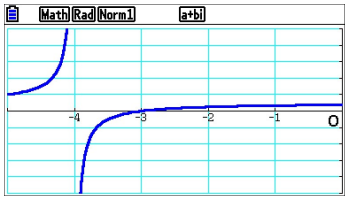
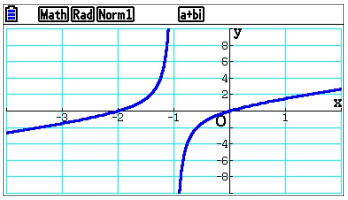
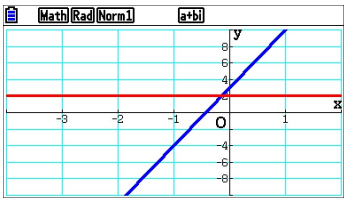
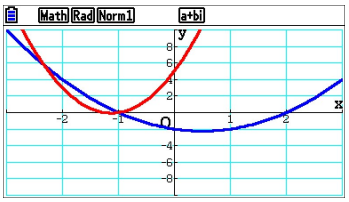
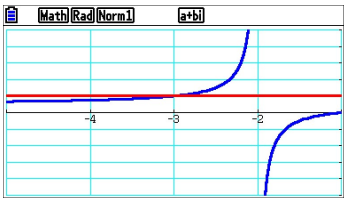
d. $\dfrac{x(x+2)}{x+1}>0$ donne $\mathcal{S}=\left]-2;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

2. En utilisant les techniques de *transformation*, on transforme pour pouvoir réaliser un tds :

a. $7x+3\leqslant 2\Leftrightarrow 7x+1\leqslant 0$ donne $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{1}{7}\right]$.

b. $(x+1)(x-2)<(x+1)(4x+5)\Leftrightarrow(x+1)(x-2)-(x+1)(4x-5)<0\Leftrightarrow(x+1)(x-2-4x-5)<0$.
Et $(x+1)(-3x-7)<0$ donne $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$.

c. $\dfrac{x+1}{x+2}<2\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x+2}-2<0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2(x+2)}{x+2}<0\Leftrightarrow\dfrac{x+1-2(x+2)}{x+2}<0\Leftrightarrow\dfrac{-x-3}{x+2}<0$.
Et $\dfrac{-x-3}{x+2}<0$ donne $\mathcal{S}=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$.

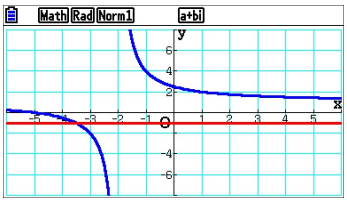








Exercice 8

Le logiciel Xcas nous donne les solutions de l'inéquation $\dfrac{x+5}{x+2} \geqslant -1$, qui sont $\left]-\infty;-\dfrac{7}{2}\right] \cup]-2;+\infty[$, en effet :

- $\dfrac{x+5}{x+2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x+2}+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+7}{x+2} \geqslant 0$ (ZPQ ✓)
- $2x+7=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$ et $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$		$-7/2$		-2 (D)		$+\infty$	
$(x+5)$		$-$	0	$-$		$+$		$m=1\oplus$
$(x+2)$		$-$		$+$	0	$+$		$m=1\oplus$
expr		$+$	0	$-$	‖	$+$		



DOC 10

CH04 - Second degré, études de signes

I. Signe d'une fonction du second degré

I.1. Idée

Idée

Dans le chapitre 1, on a vu que le polynôme du second degré ax^2+bx+c peut (éventuellement) se factoriser sous forme d'un produit de facteurs du premier degré. Les rappels vus au chapitre 3 permettent désormais de déterminer le signe d'un trinôme !

I.2. Le théorème

Théorème

Un polynôme du second degré ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ est du signe de a, sauf entre les racines quand elles existent.

Démonstration

Soit f une fonction du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$. On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de $\Delta=b^2-4ac$.

Lorsque Δ est positif, on sait que le polynôme possède deux racines x_1 et x_2 et qu'on peut le factoriser sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Le signe de f peut alors être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a	signe de a						
$x-x_1$		$-$	0	$+$			
$x-x_2$			$-$		0	$+$	
produit $f(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

Lorsque Δ est nul, on sait que le polynôme possède une unique racines α et et qu'on peut le factoriser sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2$. Le signe de f peut alors aussi être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		α		$+\infty$
a	signe de a				
$x-\alpha$		$-$	0	$+$	
$x-\alpha$		$-$	0	$+$	
produit $f(x)$	signe de a		0	signe de a	

Lorsque Δ est négatif, le polynôme n'a pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La parabole ne traverse jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe.
Si $a>0$, la parabole est ouverte vers le haut. Comme l'axe des abscisses ne la traverse pas, c'est qu'il passe en dessous. Donc la fonction est toujours positive comme a.
Si $a<0$, la parabole est ouverte vers le bas et n'est pas traversée par l'axe des abscisses, donc elle doit être située en-dessous de celui-ci et la fonction est toujours négative, comme a.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Algorithme

En python, on peut créer une fonction et une procédure permettant d'afficher le signe de ax^2+bx+c :

Code Python

```python
from math import *
#les racines
def racines(a,b,c):
    delta = b**2 - 4*a*c
    if delta > 0:
        return (-b+sqrt(delta))/(2*a),(-b-sqrt(delta))/(2*a)
    elif delta == 0:
        return -b/(2*a)
#le signe
def signe(a,b,c):
    delta = b**2 - 4*a*c
    if delta > 0 :
        print(f"Les racines sont {racines(a,b,c)}")
        if a>0 : print(f"Le signe du trinôme est +0-0+")
        else : print(f"Le signe du trinôme est -0+0-")
    elif delta == 0:
        print(f"La racine est {racines(a,b,c)}")
        if a>0 : print(f"Le signe du trinôme est +0+")
        else : print(f"Le signe du trinôme est -0-")
    else :
        print(f"Pas de racine")
        if a>0 : print(f"Le signe du trinôme est +")
        else : print(f"Le signe du trinôme est -")
```

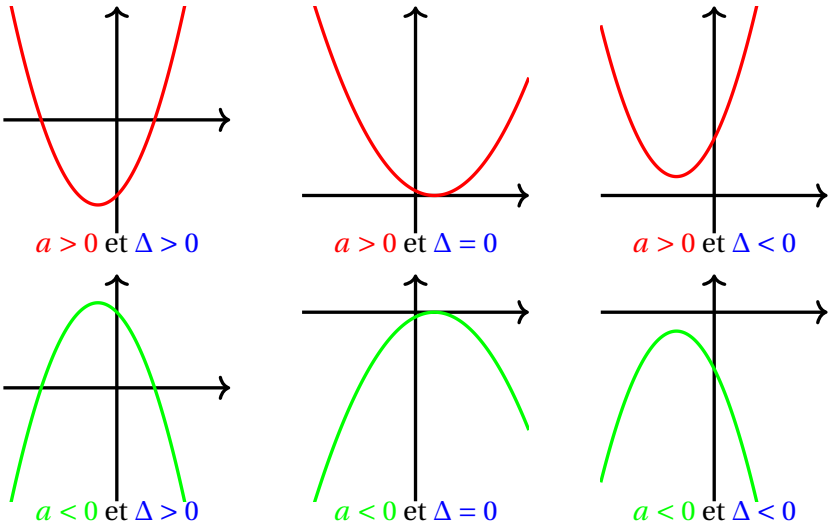
Début de la console python

```
>>> signe(1,5,6)
Les racines sont (-2.0, -3.0)
Le signe du trinôme est +0-0+
>>> signe(1,1,1)
Pas de racine
Le signe du trinôme est +
>>> signe(-1,-6,-9)
La racine est -3.0
Le signe du trinôme est -0-
```

Fin de la console python

Illustration

En pratique, il suffit de connaître les éventuelles racines du polynôme et de regarder le signe de a pour visualiser la parabole et donc obtenir le tableau de signes !



II. Résolution d'inéquations

II.1. Cas du second degré

Méthode

Pour résoudre une inéquation **du second degré**, on utilise un tableau de signes :

- on se ramène à une étude de signes en passant tout du même côté de l'inégalité ;
- on dresse le tableau de signes de l'expression obtenue ;
- on y lit l'ensemble des solutions.

II.2. Cas général

Méthode

Pour résoudre une inéquation, l'outil le plus efficace est très souvent le tableau de signes, après avoir tout passé du même côté.

Il est parfois nécessaire de **transformer** l'expression obtenue pour pouvoir dresser son tableau de signes facilement. On a vu dans ce chapitre et le précédent comment étudier le signe d'une fonction affine et d'un polynôme du second degré. Si une autre forme se présente, il peut être nécessaire de :

- reconnaître une expression qui est toujours de même signe (carré, racine, somme de nombres positifs, somme de nombres négatifs, …) ;
- factoriser l'expression, pour étudier le signe de chacun des facteurs avant d'utiliser la règle des signes ;
- écrire l'expression sous forme d'un quotient (mettre au même dénominateur), pour étudier le signe du numérateur puis du dénominateur avant d'utiliser là encore la règle des signes.

Idée

On peut retenir ce principe sous le « petit » nom de méthode ZPQ.

Attention

Il ne faut **jamais** découper une expression en étudiant le signe de chaque terme d'une somme (ou d'une différence) dans un tableau, car c'est la règle des signes ($\times$, $\div$) qui est à la base des tableaux de signes !

III. Position relative de deux courbes

Définition

Étudier la **position relative** de deux courbes, c'est déterminer laquelle est graphiquement située au-dessus de l'autre. Cela peut varier suivant les intervalles.

Méthode

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

- on calcule la différence $f(x) - g(x)$;
- on étudie son signe dans un tableau ;
- on conclut : sur les intervalles où la différence est positive, c'est $\mathcal{C}_f$ qui est au-dessus, et inversement.

Exemples

Déterminer la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 0{,}5x^2 + 2x - 4$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x - 2{,}5$.
Mêmes questions avec la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 5x + 3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 12x - 69$.

DOC 11

CH04 - Second degré, études de signes - Exercices

Exercice 1

1. Étudier le signe des expressions suivantes :
   a. $4x^2 - 7x - 3$;
   b. $-7x^2 + 12x - 6$;
   c. $4x^2 - 2{,}4x + 0{,}36$.
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $-x^2 + 5x + 7 \geqslant 0$;
   b. $11x^2 + 16x - 9 < 10x + 8$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x-1)(x^2 - 5x + 6) > 0$;
2. $\dfrac{-x^2 + 5x - 7}{2x + 5} \leqslant 0$;
3. $x^3 - x^2 + 4x \geqslant 0$;
4. $\dfrac{3x}{x+1} \geqslant 5x$.

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{-5x^2 - 3x + 8} \leqslant 0$;
2. $\dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1}$;
3. $(-x^2 + 5x - 6)(-3x^2 + 5x - 2) \geqslant 0$.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ et $g(x) = -x - 5$.

1. a. Sur la calculatrice, tracer les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, avec `Xmin=-10`, `Xmax=1`, `Ymin=-8` et `Ymax=8`.

Ecran de la calculatrice

   b. À l'aide des outils `graphiques`, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   c. Déterminer la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   NB : on pourra présenter sous la forme « Sur l'intervalle ....., $\mathcal{C}_f$ est ..... de $\mathcal{C}_g$ ».
2. Étudier, grâce au signe de $f(x) - g(x)$, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

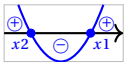
DOC 12

CH04 - Second degré, études de signes - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. **a.** $4x^2-7x-3$: $\Delta=(-7)^2-4\times4\times(-3)=97$ et les racines sont $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+\sqrt{97}}{8}\approx2{,}106 \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-\sqrt{97}}{8}\approx-0{,}356 \end{cases}$.

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$4x^2-7x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

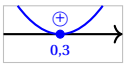


b. $-7x^2+12x-6$: $\Delta=-24$, donc pas de racine et signe $\ominus$

x	$-\infty$	$+\infty$
$-7x^2+12x-6$	$-$	

c. $4x^2-2{,}4x+0{,}36$: $\Delta=0$, la racine est $x_0=\dfrac{-b}{2a}=0{,}3$ avec le signe $\oplus$.

x	$-\infty$		$0{,}3$		$+\infty$
$4x^2-2{,}4x+0{,}36$		$+$	0	$+$	



2. **a.** $-x^2+5x+7\geqslant0$ est bien une inéquation du second degré.

$-x^2+5x+7=0$: $\Delta=53$, les deux racines sont $x_1=\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}\approx-1{,}14$ et $x_2=\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}\approx6{,}14$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$-x^2+5x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

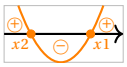
Ainsi, $\mathcal{S}=[x_1\,;x_2]$.

b. $11x^2+16x-9<10x+8$ n'est pas (encore) une inéquation du second degré.

Or $11x^2+16x-9<10x+8\Leftrightarrow11x^2+16x-9-10x-8<0\Leftrightarrow11x^2+6x-17<0$ qui est bien une inéquation du second degré.

$11x^2+6x-17=0$: $\Delta=784$, les deux racines sont $x_1=1$ et $x_2=\dfrac{-17}{11}$.

x	$-\infty$		$-17/11$		1		$+\infty$
$11x^2+6x-17$		$+$	0	$-$	0	$+$	



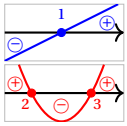
Ainsi, $\mathcal{S}=\left]\dfrac{-17}{11}\,;1\right[$.

Exercice 2

1. $(x-1)(x^2-5x+6)>0$ est bien ZPQ

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ et le signe est $\ominus\oplus$;
- $x^2-5x+6=0$: $\Delta=1$, les racines sont $x_1=2$ et $x_2=3$ avec le signe $\oplus\ominus\oplus$.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

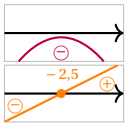


- ainsi $\mathcal{S}=]1;2[\cup]3;+\infty[$.

2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}\leqslant 0$ est bien ZPQ

- $-x^2+5x-7=0$: $\Delta=-3$, pas de racine et le signe est $\ominus$;
- $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ et le signe est $\ominus\oplus$.

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$-x^2+5x-7$		$-$	‖	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	
expr		$+$	‖	$-$	



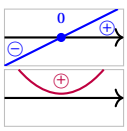
- ainsi $\mathcal{S}=]-2{,}5;+\infty[$.

3. $x^3-x^2+4x\geqslant 0$ n'est pas encore sous forme ZPQ, on transforme :

$x^3-x^2+4x\geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2-x+4)\geqslant 0$ qui est bien sous forme ZPQ

- $x=0$ et a pour signe $\ominus\oplus$;
- $x^2-x+4=0$: $\Delta=-15$ et le signe $\oplus$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
x^2-x+4		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	



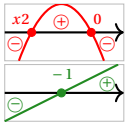
- ainsi $\mathcal{S}=[0;+\infty[$.

4. $\dfrac{3x}{x+1}\geqslant 5x$ n'est pas encore sous forme ZPQ, on transforme :

$\dfrac{3x}{x+1}\geqslant 5x \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+1}-5x\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{5x(x+1)}{x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-5x^2-5x}{x+1}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5x^2-2x}{x+1}\geqslant 0$ qui est bien ZPQ

- $-5x^2-2x=0$: $\Delta=4$, les racines sont $x_1=0$ et $x_2=-0{,}4$ avec le signe $\ominus\oplus\ominus$;
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et le signe est $\ominus\oplus$.

x	$-\infty$		-1		$-0{,}4$		0		$+\infty$
$-5x^2-2x$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
expr		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	



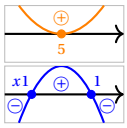
- ainsi $\mathcal{S} =]-\infty;-1[\cup]-0{,}4;0]$.

Exercice 3

1. $\dfrac{x^2-10x+25}{-5x^2-3x+8} \leqslant 0$ est bien sous la forme ZPQ :

- $x^2-10x+25=0$: $\Delta=0$, la racine est $x_0=5$ avec le signe $\oplus$;
- $-5x^2-3x+8=0$: $\Delta=169$, les racines sont $x_1=-1{,}6$ et $x_2=1$ avec le signe $\ominus\oplus\ominus$.

x	$-\infty$		$-1{,}6$		1		5		$+\infty$
$x^2-10x+25$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$-5x^2-3x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
expr		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$-$	



- ainsi $\mathcal{S} =]-\infty;-1{,}6[\cup]1;+\infty[$.

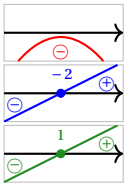
2. $\dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1}$ n'est pas (encore) sous la forme ZPQ.

$\dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x+2} - \dfrac{3x+2}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \dfrac{(3x+2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0.$

Soit encore $\dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+2x-3x^2-6x-2x-4}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{-5x^2-6x-4}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0$ qui est bien ZPQ :

- $-5x^2-6x-4=0$: $\Delta=-44$, pas de racine et le signe est $\ominus$;
- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ et le signe est $\ominus\oplus$;
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ et le signe est $\ominus\oplus$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-5x^2-6x-4$		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
expr		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

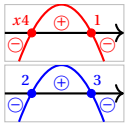


- ainsi $\mathcal{S} =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

3. $(-x^2+5x-6)(-3x^2+5x-2) \geqslant 0$ qui est bien ZPQ :

- $-x^2+5x-6=0$: $\Delta=1$, les deux racines sont $x_1=2$ et $x_2=3$ avec le signe $\ominus\oplus\ominus$;
- $-3x^2+5x-2=0$: $\Delta=1$, les deux racines sont $x_3=\dfrac{2}{3}$ et $x_4=1$ avec le signe $\ominus\oplus\ominus$.

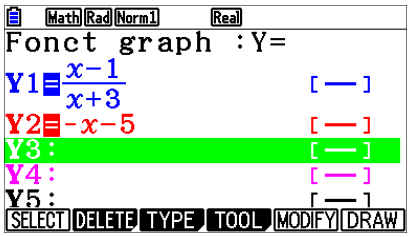
x	$-\infty$		$2/3$		1		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-3x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
expr		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

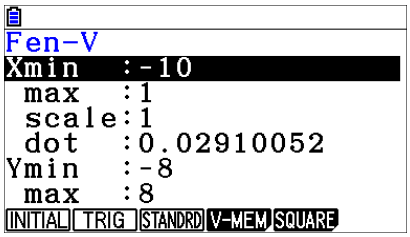


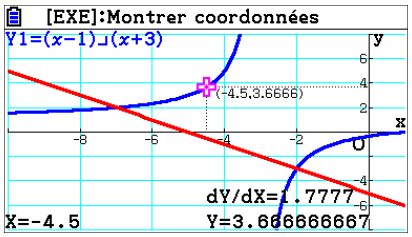
- ainsi $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup[1;2]\cup[3;+\infty[$.

Exercice 4

1. **a.** On peut proposer les étapes suivantes :

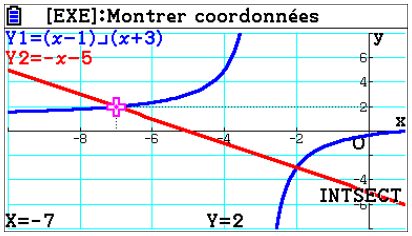


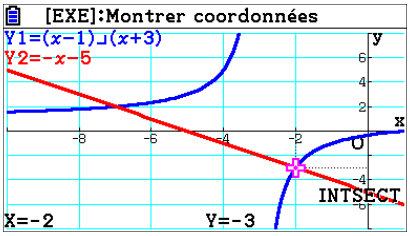




b. L'outil INTSECT permet de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

$(-7;2)$ et $(-2;-3)$





c. La calculatrice permet de conjecturer que :

sur l'intervalle $]-\infty;-7[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$;
sur l'intervalle $]-7;-3[$, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$;
sur l'intervalle $]-3;-2[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$;
sur l'intervalle $]-2;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$;
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se croisent aux points de coordonnées $(-7;2)$ et $(-2;-3)$.

2. On a $f(x)-g(x)=\dfrac{x-1}{x+3}-(-x-5)=\dfrac{x-1}{x+3}+x+5=\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{(x+5)(x+3)}{x+3}=\dfrac{x-1+x^2+3x+5x+15}{x+3}$.

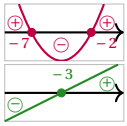
Soit encore $f(x)-g(x)=\dfrac{x^2+9x+14}{x+3}$ qui est bien sous forme Produit/Quotient :

- $x^2+9x+14=0$: $\Delta=25$, les racines sont $x_1=-2$ et $x_2=-7$ avec le signe $\oplus\ominus\oplus$;
- $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ et le signe est $\ominus\oplus$.

x	$-\infty$		-7		-3		-2		$+\infty$
$x^2+9x+14$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
pos. rel.		$\mathcal{C}_g$ dessus		$\mathcal{C}_f$ dessus	‖	$\mathcal{C}_g$ dessus		$\mathcal{C}_f$ dessus	

D

$(-7;2)$ $(-2;-3)$



DOC 13

CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance

I. Rappels sur les probabilités

I.1. Généralités

Définitions

L'ensemble de toutes les **issues** (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).
Un sous-ensemble de cet univers s'appelle un **événement**.

Propriété

Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**.
Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables** (c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes chances de se produire), la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$p(\text{A}) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}.$$

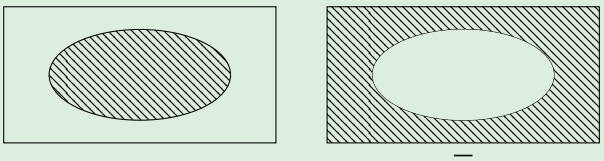
Point histoire

Huygens (1629 – 1695, 🇳🇱) et Cardan (1501 – 1576, 🇮🇹) sont considérés comme les « pères de la théorie des probabilités ». Cependant la mauvaise réputation de Cardan a fait pencher la paternité sur Pascal et Fermat. L'apparition de la notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au XII$^{\text{e}}$ siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux avec le *Traité des contrats* de Pierre de Jean Olivia.
Les idées se propagent en Italie et en France, Galilée écrit entre 1620 en 1718 son petit mémoire sur le jeu de dés intitulé *Sopra le Scoperte de i Dadi* dans lequel il suppose l'équipossibilité des lancers. Cette notion d'équipossibilité se retrouve également, plus tard, dans la correspondance de Pierre de Fermat et dans celle de Pierre-Simon de Laplace.

I.2. Événements, calculs de probabilités

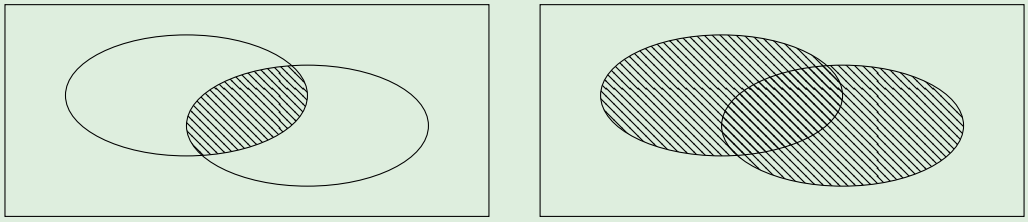
Définitions

L'événement **contraire** (ou complémentaire) $\overline{\text{A}}$ d'un événement A se réalise dès que A ne se réalise pas :



A $\overline{\text{A}}$

L'**intersection** $\text{A} \cap \text{B}$ (lire « A inter B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque A **ET** B se réalisent *simultanément*.
La **réunion** $\text{A} \cup \text{B}$ (lire « A union B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque l'*un au moins* des deux événements se réalise (l'un **OU** l'autre **OU** les deux).



$\text{A} \cap \text{B}$ $\text{A} \cup \text{B}$

Propriétés

Quels que soient les événements A et B :

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. *formule de la réunion*

Exemple : test pharmaceutique

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B.
Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non Guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement « le patient a été traité avec le médicament A » et G : « il est guéri ».

- $\overline{A}$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament B » ;
- $A \cap G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **et** est guéri » ;
- $A \cup G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **ou** est guéri ».

On a, de plus :

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{455}{800} = \dfrac{345}{800}$;
- $p(A \cap G) = \dfrac{383}{800}$;
- $p(A \cup G) = p(A) + p(G) - p(A \cap G) = \dfrac{455}{800} + \dfrac{674}{800} - \dfrac{383}{800} = \dfrac{746}{800}$.

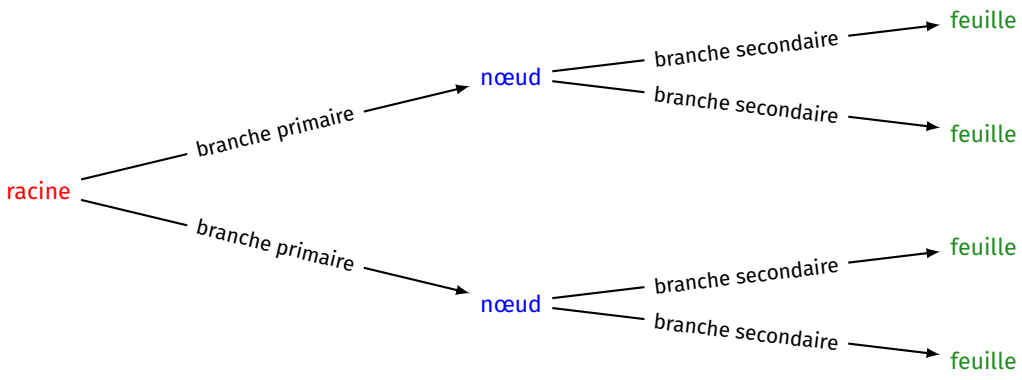
II. Arbre pondéré, probabilités conditionnelles

II.1. Utilisation d'un arbre pondéré

Définition

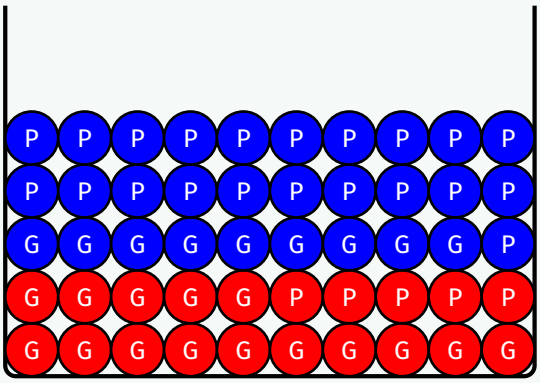
Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches (primaire ou secondaire) est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.
À la **racine** de l'arbre, on trouve toujours l'univers de l'expérience aléatoire, et à chaque **noeud** ou **feuille**, un événement.

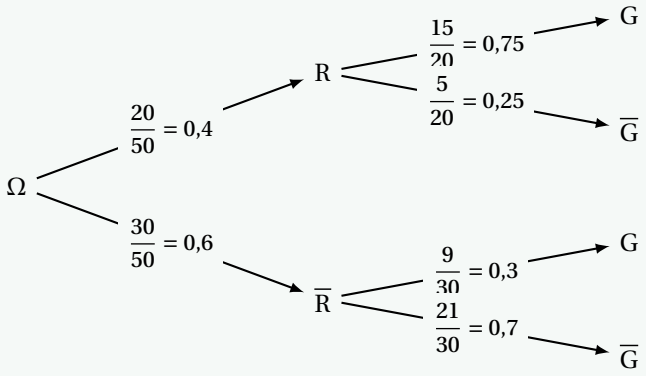
Illustration



Exemple : tirage dans une urne

Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions « Gagné » ou « Perdu ». 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.
On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement « La boule tirée est rouge » et G « La boule tirée est gagnante ». On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :





Exercice : test pharmaceutique

Décrire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Théorèmes

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est toujours égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de toutes les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exemple : tirage dans une urne

La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = p(\text{R} \cap \text{G})$.
Sur l'arbre, on retrouve bien $0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0{,}48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $\text{R} \cap \text{G}$, de probabilité 0,3 et le chemin $\overline{\text{R}} \cap \text{G}$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$. On retrouve bien $p(\text{R} \cap \text{G}) + p(\overline{\text{R}} \cap \text{G}) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48 = p(\text{G})$.

Exercice : test pharmaceutique

En utilisant l'arbre pondéré ci-dessus, déterminer $p(\text{A})$, $p(\text{B} \cap \text{G})$, $p(\text{G})$, $p(\overline{\text{G}})$.

II.2. Probabilité conditionnelle

Définition

Lorsqu'on construit un arbre pondéré comme ci-dessus, les probabilités inscrites sur les branches primaires sont des probabilités classiques, mais les probabilités inscrites sur les branches secondaires sont des **probabilités conditionnelles** : ce sont les probabilités d'arriver à ce nœud *sachant que l'on vient de tel autre nœud.*
La probabilité conditionnelle que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note $p_{\text{A}}(\text{B})$ (lire « probabilité de B sachant A ») et, si $p(\text{A}) \neq 0$:

$$p_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{A})}.$$

Remarques

- Si $p(B) \neq 0$, on peut inverser les rôles de A et B dans la formule ci-dessus : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
- Si les probabilités conditionnelles du type $p_A(B)$ sont en général données dans les énoncés, il arrive souvent qu'on doive inverser les conditions et calculer par exemple $p_B(A)$. C'est là que la formule est nécessaire.

Exemple

$p_R(G) = 0{,}75$ est la probabilité de tirer une boule gagnante *sachant qu'elle est rouge*, autrement dit, la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les rouges*. Cette probabilité découle de la constitution de l'urne.

$p_G(R)$ ne figure pas dans l'arbre. C'est la probabilité d'avoir tiré une boule rouge *sachant qu'elle est marquée gagnante*, autrement dit la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les boules gagnantes*. C'est moins naturel dans ce sens, puisqu'on voit la couleur de la boule avant d'y trouver la marque.

$$p_G(R) = \frac{p(G \cap R)}{p(G)} = \frac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625.$$

On peut tout de même retrouver cette probabilité grâce à la constitution de l'urne : sur les $15 + 9 = 24$ boules gagnantes, il y en a 15 rouges et $\dfrac{15}{24} = 0{,}625$.

Exercice : test pharmaceutique

Calculer $p_G(A)$ de deux façons différentes : en utilisant l'arbre puis en utilisant le tableau à double entrée.

Propriétés

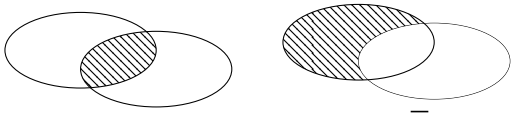
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. *formule des probabilités composées*
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

Démonstration

- C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la probabilité d'un chemin est le produit de celles des branches qui le composent :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

- C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1 :



$A \cap B$ $A \cap \overline{B}$

En effet, la réunion de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ est égale à A donc $p_A(\overline{B}) + p_A(B) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(A)} + \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A)}{p(A)} = 1$.

II.3. Formule des probabilités totales

Définition : Partition de l'univers

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une liste d'évènements relatifs à une même expérience aléatoire.
On dit que ces événements réalisent une **partition** de l'univers si :

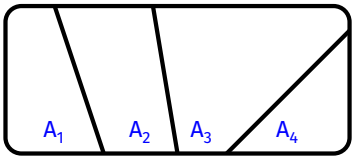
- aucun de ces éléments n'est vide ;
- ils sont deux à deux disjoints (c'est-à-dire d'intersection vide) ;
- la réunion de tous ces événements recouvre l'univers tout entier.

Remarque

En particulier, un événement A et son événement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Illustration

Pour une partition à 4 éléments :



Théorème : Formule des probabilités totales

Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ réalisent une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

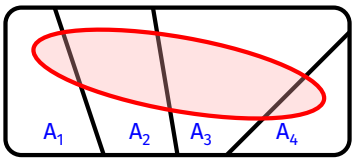
$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B).$$

En particulier, pour tous événements A et B :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B).$$

Démonstration

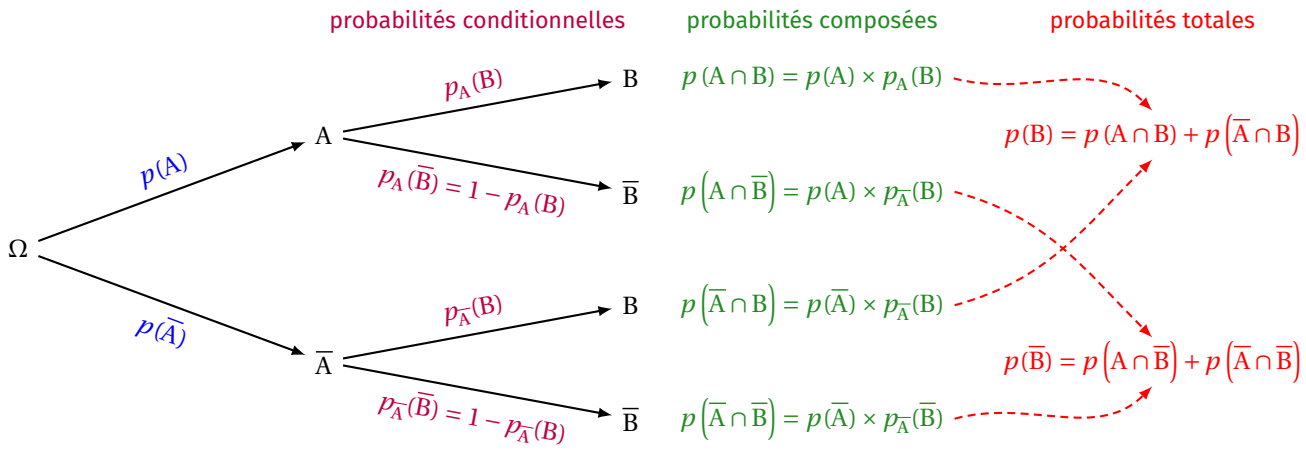
C'est la propriété qu'on utilise quand on dit que la probabilité d'un événement est la somme de toutes les probabilités des chemins qui mènent à cet événement. Elle vient du fait que les événements $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$,..., $A_n \cap B$ sont deux à deux disjoints et recouvrent entièrement B.



Illustration

Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :

- des conditionnelles ;
- les composées ;
- les totales.



III. Indépendance

III.1. Événements indépendants

Définition - Propriété

On dit que deux événements de probabilités non nulles sont **indépendants** s'ils vérifient l'une ou l'autre des propriétés ci-dessous, qui sont équivalentes :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p_B(A) = p(A).$$

Autrement dit, la réalisation d'un événement n'influence pas la probabilité de l'autre.

Démonstration

En effet, a priori on a $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ donc si les événements sont indépendants :
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B)$ et donc si $p(A) \neq 0$, on retrouve bien $p(B) = p_A(B)$.

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement « Obtenir un cœur » et D « Obtenir une dame ». $C \cap D$ est alors « Obtenir la dame de cœur ».

- $p(C) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $p(D) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $p(C \cap D) = \dfrac{1}{32}$ et $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

On a aussi $p_C(D) = p(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les cœurs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\dfrac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $p(C) = \dfrac{8}{34}$ et $p(D) = \dfrac{4}{34}$ et $p(C \cap D) = \dfrac{1}{34}$ et $p(C) \times p(D) = \dfrac{8 \times 4}{34 \times 34} \neq p(C \cap D)$ donc C et D pas indépendants.

De même, $p_C(D) = \dfrac{1}{8}$ mais $p(D) = \dfrac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration

$p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap B) = p(B)$ d'après la formule des probabilités totales, donc, si A et B sont indépendants,
$p(\overline{A} \cap B) + p(A) \times p(B) = p(B)$ et ainsi $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B) = p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A})$.

III.2. Expériences indépendantes

Définition

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession d'épreuves indépendantes**.

Exemple

On tire au hasard successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
Si on remet la carte avant le deuxième tirage, les conditions initiales sont identiques, donc on peut considérer que les deux tirages sont indépendants.
Si on ne remet pas la carte, la constitution du paquet dépend de la première carte tirée, donc les expériences ne sont pas indépendantes.

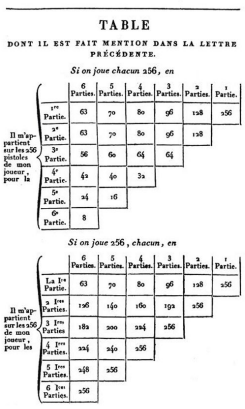
Propriété (admise)

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple

On lance deux fois de suite un dé cubique.
La probabilité d'obtenir un double 5 est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$.

Point histoire - Anecdote



TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour les	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
La 1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2 1res Parties.	126	140	160	192	256	
3 1res Parties	182	200	224	256		
4 1res Parties.	224	240	256			
5 1res Parties.	248	256				
6 1res Parties.	256					

Blaise Pascal Pierre de Fermat

Le chevalier de Méré (17e siècle) était un joueur et souhaitait connaître les stratégies amenant à un plus grand nombre de succès. Il soumet ce problème : « Deux joueurs misent chacun 32 pistoles dans un jeu en trois manches gagnantes. La partie est interrompue alors que le premier joueur a remporté deux manches et le second une seule. Quel doit être alors le gain de chacun des deux joueurs ? » Pascal et Fermat relèvent le défi et on retrouve les réponses dans leurs échanges épistolaires. Le problème décrit par le chevalier de Méré est un problème historique que l'on trouve déjà dans le Summa de Arithmetica de Luca Pacioli (1494). Pascal et Fermat sont les premiers à y apporter une solution mathématique généralisable.
C'est cependant le Hollandais Christiaan Huygens qui publie en 1657 le premier traité mathématique consacré aux probabilités : Tractatus de Ratiociniis in Alea Ludo. De nos jours, les probabilités constituent une partie très importante des mathématiques.

Source : *LeLivreScolaire*

Humour

Source : *Astérix*, Uderzo & Goscinny

DOC 14

CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance - Exercices

Exercice 1

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers des Réseaux Sociaux, un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale. On obtient la répartition :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux.
- 1 740 élèves utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée. On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde » ;
- E l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première » ;
- T l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale » ;
- R l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement les Réseaux Sociaux (RS) ».

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise régulièrement les RS		630		
N'utilise pas régulièrement les RS				
Total				2 000

2. Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement les RS.

3. Calculer la probabilité de R sachant T, notée $p_T(R)$, et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

4. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas les RS.

5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement les RS.

   Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\frac{21}{58}$.

Exercice 2

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B. Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.
Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.
On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A ».
- B : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B ».
- S : « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.

3. L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.

L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.

4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? (le résultat sera arrondi à 10^{-2})

Exercice 3

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts. Le restaurateur constate :

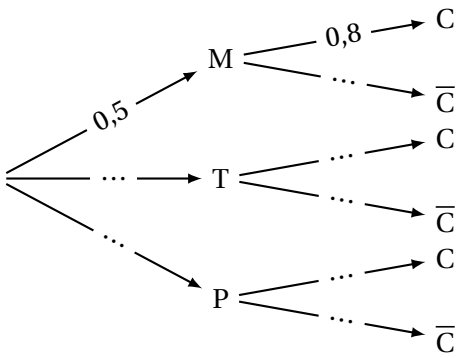
- que parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- que parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire. On note :

- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{\text{C}}$ l'évènement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(\text{T})$ et celle de $p_{\text{T}}(\text{C})$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. **a.** Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $\text{M} \cap \text{C}$ puis calculer $p(\text{M} \cap \text{C})$.

b. Montrer que $p(\text{C}) = 0{,}76$.

4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?

5. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €.

Chaque client prend un seul plat au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

a. Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

b. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probas de la somme totale dépensée :

Sommes s_i	18	20	24	…	…	…
$p(s_i)$	0,02	0,18	…			

c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

DOC 15

CH05 - Probabilités conditionnelles, indépendance - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise régulièrement les RS	760	630	350	1 740
N'utilise pas régulièrement les RS	40	70	150	260
Total	800	700	500	2 000

- Élèves de terminale : $\frac{1}{4} \times 2\,000 = 500$.
- Élèves de première : $\frac{35}{100} \times 2\,000 = 700$; il reste donc $2\,000 - (500 + 700) = 800$ élèves en seconde.
- Nombre d'élèves de terminale utilisant internet : $\frac{70}{100} \times 500 = 350$.
- Nombre d'élèves de seconde utilisant internet : par différence : $1\,740 - (350 + 630) = 760$.

2. La probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de 2^{de} qui utilise régulièrement les RS est $\frac{760}{2\,000} = 0{,}38$.

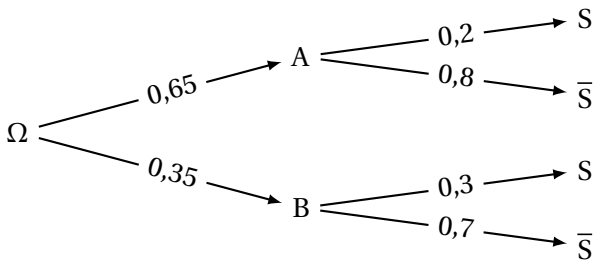
3. On a $P(T) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $P_T(R) = \frac{P(T \cap R)}{P(T)} = \frac{\frac{350}{2000}}{\frac{1}{4}} = \frac{350}{500} = 0{,}7$. C'est la probabilité qu'un élève de terminale rencontré au hasard utilise les RS, et cette donnée est dans l'énoncé !

4. Sur 2 000 élèves 260 n'utilisent pas les RS régulièrement. $P\left(\overline{R}\right) = \frac{260}{2000} = \frac{13}{100} = 0{,}13$.

5. Sur les 1 740 utilisateurs réguliers il y a 630 élèves de première ; la probabilité est donc $P_R(E) = \frac{630}{1\,740} = \frac{21}{58}$.

Exercice 2

1. On peut proposer l'arbre suivant :



2. La probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé est $p(B \cap S)$.

D'après la formule des probabilités composées, $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0{,}35 \times 0{,}3 = 0{,}105$.

3. D'après la formule des probabilités totales : $p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = 0{,}13 + 0{,}105 = 0{,}235$.

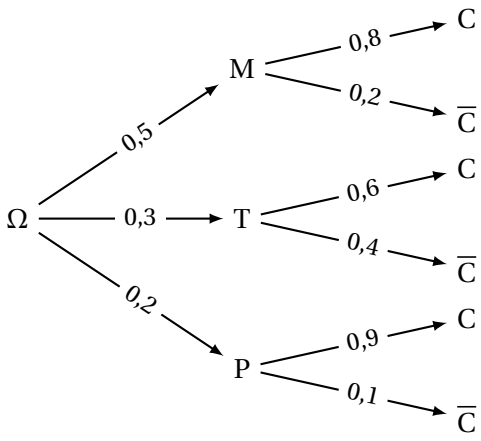
Le résultat obtenu correspond à 23,5 % : la salle de relaxation ne sera pas installée.

4. Il faut trouver $p_S(A) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}13}{0{,}235} \approx 0{,}55$ au centième près.

Exercice 3

1. L'énoncé nous donne $p(\text{T}) = 0{,}3$ et $\text{P}_\text{T}(\text{C}) = 0{,}6$.

2. L'arbre de probabilités est :



3. **a.** $\text{M} \cap \text{C}$ représente l'évènement « le client a pris un macaron **et** un café ».
Et on a $p(\text{M} \cap \text{C}) = p(\text{M}) \times p_\text{M}(\text{C}) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$.

b. D'après la formule des probabilités totales, on a $p(\text{C}) = p(\text{M} \cap \text{C}) + p(\text{T} \cap \text{C}) + p(\text{P} \cap \text{C})$.
Et donc $p(\text{C}) = 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}4 + 0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}76$.

4. Il faut trouver $p_\text{C}(\text{M}) = \dfrac{p(\text{C} \cap \text{M})}{p(\text{C})} = \dfrac{0{,}4}{0{,}76} \approx 0{,}53$ à 0,01 près.

5. **a.** On a :

- P + M + C : 18 + 6 + 2 = 26 € ;
- P + M : 18 + 6 = 24 € ;
- P + T + C : 18 + 7 + 2 = 27 € ;
- P + T : 18 + 7 = 25 € ;
- P + C : 18 + 2 = 20 € ;
- P : 18 €

b. le tableau complété est :

Sommes s_i	18	20	24	…	…	…
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

c. On a $18 \times 0{,}02 + 20 \times 0{,}18 + 24 \times 0{,}1 + 25 \times 0{,}12 + 26 \times 0{,}4 + 27 \times 0{,}18 = 24{,}62$ (€).
Sur un grand nombre de repas la recette par client s'élève à 24,62 €.

DOC 16

CH06 - Trigonométrie

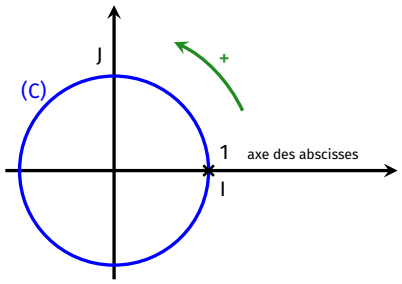
I. Mesure d'angle en radians

I.1. Le cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle *orienté* de centre O, de rayon 1 et parcouru dans le *sens inverse des aiguilles d'une montre.*

Illustration



Remarque

Le sens de parcours sur le cercle trigonométrique s'appelle le sens *direct*, le sens *trigonométrique* ou encore sens *positif*.

I.2. Longueur d'arc et mesure en radian

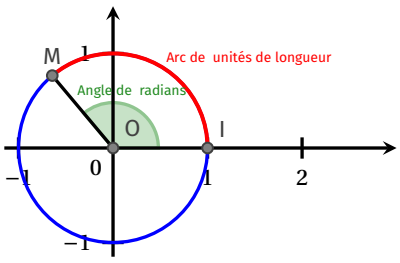
Propriété

Si I est le point de coordonnées $(1\,;0)$ et M est un point du cercle trigonométrique, alors la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ (exprimée dans l'unité de longueur du repère) est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

Définition

La **mesure en radians** d'un angle est égale à la **longueur de l'arc** qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique.

Illustration



Remarque - Exemple

Les mesures en radians ou en degrés sont donc proportionnelles. Un angle de π radians mesure 180° donc une simple règle de proportionnalité permet de convertir d'une unité à l'autre : $\begin{array}{|c|c|}\hline 180 & \pi \\ \hline d & r \\ \hline \end{array}$.

Par exemple, $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ rad ; $\dfrac{2\pi}{3}$rad $= 120^\circ$.

II. Enroulement autour du cercle

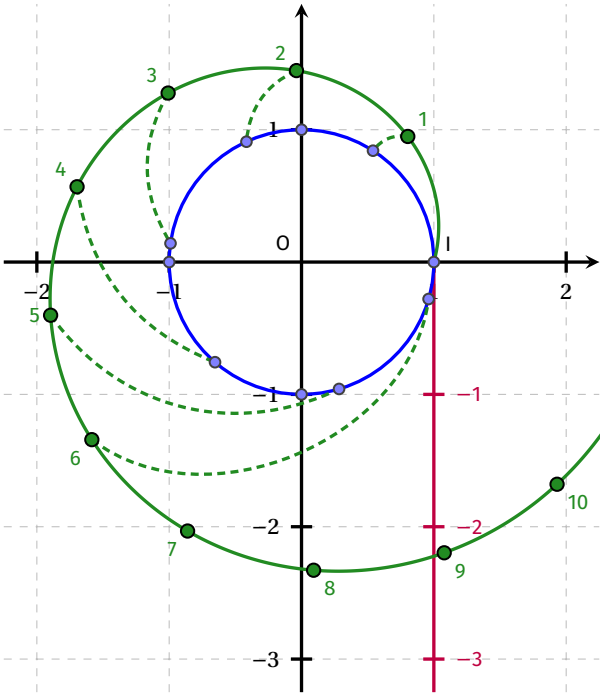
II.1. Le principe

Définition

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$; le point I de coordonnées $(1;0)$ et la tangente $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}$ en I. On gradue la droite $\mathcal{D}$ en choisissant comme origine le point d'accroche I (l'unité étant celle du repère).
En *enroulant* cette droite $\mathcal{D}$ autour du cercle, on va pouvoir « graduer » $\mathcal{C}$:

- à chaque graduation x de la droite va correspondre un et un seul point M sur le cercle, appelé **point image** de x ;
- inversement, tout point M du cercle va être l'image d'une *infinité* de graduations de la droite, puisqu'on pourra avoir fait plusieurs tours avant de se « poser » sur le point M.

Illustration



Remarque

La demi-droite graduée négativement s'enroule dans le sens contraire autour du cercle.

Propriété

Si deux graduations de la droite ont le même point-image sur le cercle, alors elles diffèrent d'un nombre entier de tours. Autrement dit, si x et y ont le même point-image, alors :

$$y = x + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un nombre entier.}$$

On dit que x et y sont égaux *à* 2π *près* ou égaux *modulo* 2π ou congrus *modulo* 2π.

Conséquence

On appelle **mesure principale** d'un angle x l'unique l'angle y tel que $\begin{cases} y = x + k \times 2\pi \\ -\pi < y \leqslant \pi \end{cases}$.
On peut déterminer la mesure principale par « réductions » de 2π (on « rajoute » ou on « enlève » des tours).

II.2. Valeurs remarquables

Remarque

Dans la mesure où le périmètre du cercle est 2π, les graduations entières de la droite ne se poseront pas sur des points particuliers du cercle. Il est plus judicieux de graduer la droite avec des fractions et des multiples de π, ces valeurs ayant des points-images plus faciles à placer sur le cercle !

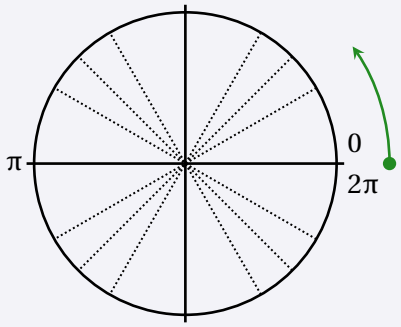
Propriété

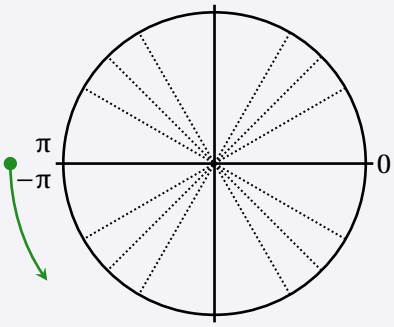
Les valeurs remarquables sur le cerlce trigo sont les valeurs 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ et toutes les valeurs associées dans les autres quadrants du cercle.

Pour les placer facilement sur le cercle, il suffit de « découper » le demi-cercle supérieur de longueur π en 6 ; 4 ; 3 ou 2.

Exercice

Placer ces valeurs remarquables sur le premier quadrant du cercle ci-dessous, puis placer sur le cercle les valeurs associées dans les autres quadrants (en fonction du « sens de parcours ») :





III. Fonctions sinus et cosinus

III.1. Définition

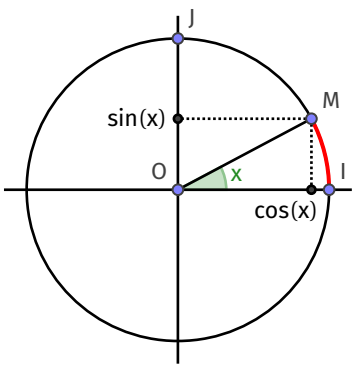
Définition

Soit x un nombre réel et M son point-image sur le cercle trigonométrique. Par définition :

- l'**abscisse** de M est appelée le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$;
- l'**ordonnée** de M est appelée le **sinus** de x, noté $\sin(x)$.

Le point M a donc pour coordonnées $\big(\cos(x)\,;\,\sin(x)\big)$.

Illustration



Propriété : lien avec les formules « SOHCAHTOA »

Ces définitions sont cohérentes avec celles vues au collège, dans un triangle rectangle!

Démonstration

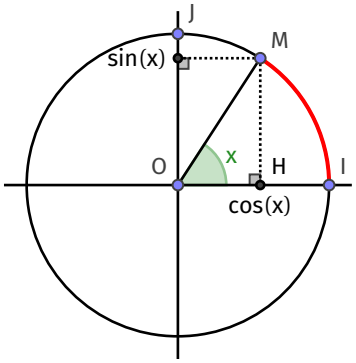
En effet, choisissons un réel x dans le premier quadrant.
Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses : le triangle OHM est rectangle en H. On peut donc appliquer les formules classiques :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{HM}}{\text{OM}} \text{ et } \cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}}.$$

Comme le cercle est le cercle trigonométrique, son rayon est égal à 1 donc OM = 1. On obtient donc bien :

$$\sin(x) = \text{HM} = \text{ordonnée de M et } \cos(x) = \text{OH} = \text{abscisse de M.}$$

Cette nouvelle définition permet d'étendre les notions de cosinus et sinus à des angles obtus, ou négatifs.



Remarque

On a ainsi décrit un mécanisme qui, à tout réel x fait correspondre une et une seule valeur de $\cos(x)$. On a donc défini une *fonction*, qu'on appelle la fonction *cosinus*. Même chose pour la fonction *sinus*.

III.2. Valeurs remarquables

Propriété : tableau de valeurs

Les valeurs exactes des cosinus et sinus des valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique sont à **connaître**. Il suffit de retenir celles du premier quadrant, les autres se retrouvent par symétrie et changement de signes.

angle (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque

Le cercle trigonométrique *transparent* permet de lire directement les valeurs particulières des angles « classiques ».

III.3. Propriétés complémentaires

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Démonstration

En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = OH^2 + HM^2 = OM^2$ d'après le théorème de Pythagore. Et comme le rayon du cercle est 1, $OM^2 = 1$.

Propriété : fonctions bornées

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **bornées** par -1 et 1.

Démonstration

En effet, comme les points-images ne sortent pas du cercle trigo, leurs coordonnées ne peuvent pas dépasser 1 à droite et -1 à gauche!

Propriété : périodicité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.

Remarque

La périodicité des fonctions sin et cos se traduit graphiquement qu'il suffit de construire la courbe sur un intervalle de longueur 2π (on parle de « motif ») puis de translater autant de fois que nécessaire!

Démonstration

En effet, si on ajoute 2π à un angle x, on ne fait que rajouter un tour en enroulant la droite, donc on retombera sur le même point image sur le cercle, et donc les coordonnées seront bien les mêmes.

Propriété : parité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
On dit que la fonction cosinus est **paire** et que la fonction sinus est **impaire**.

Démonstration

En effet, x et $-x$ ont des points images symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ils ont donc la même abscisse (cosinus) mais des ordonnées opposées (sinus).

Remarque

La parité des fonctions sin et cos se traduit graphiquement par :

- le fait que la courbe représentative de la fonction sin est symétrique par rapport à l'origine ;
- le fait que la courbe représentative de la fonction cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III.4. Tableaux de signes, variations et courbes représentatives

Exercice

Dresser les tableaux de signes et les tableaux de variation des fonctions sinus et cosinus. Il suffit pour cela d'imaginer un point M décrivant le cercle trigonométrique et de regarder le *signe* ou les *variations* de son abscisse puis de son ordonnée.

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
signe de $\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

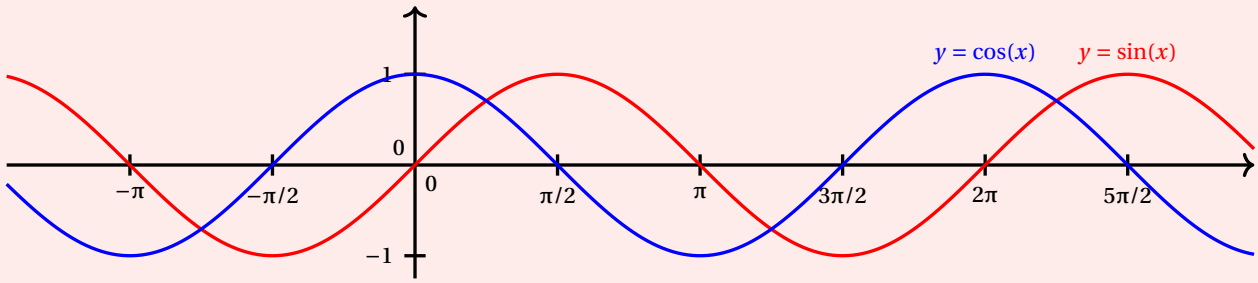
x	0		π		2π
signe de $\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0

x	0		π		2π
variation de cos	1	↘	-1	↗	1

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
variation de sin	0	↗	1	↘	-1	↗	0

Propriété : courbes représentatives

Les courbes des fonctions sinus et cosinus s'appellent toutes les deux des **sinusoïdes**.



Animation pour le tracé de la courbe de la fonction sinus : `https://www.geogebra.org/m/NQ9jcUVx`.

DOC 17

CH06 - Trigonométrie - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

1. Convertir, en radians, les mesures données en degrés :

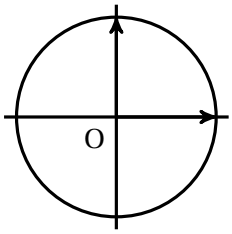
$10°$; $59°$; $180°$; $18°$; $72°$; $112{,}5°$.

2. Convertir, en degrés, les mesures données en radians :

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2

Sur le cercle trigonométrique, placer les points images des angles en radians suivants :



1. π
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{3\pi}{2}$
4. $\frac{\pi}{6}$
5. $-\frac{\pi}{3}$
6. $-\frac{3\pi}{4}$
7. $\frac{5\pi}{6}$
8. $-\frac{3\pi}{2}$

Exercice 3

On donne les figures suivantes :

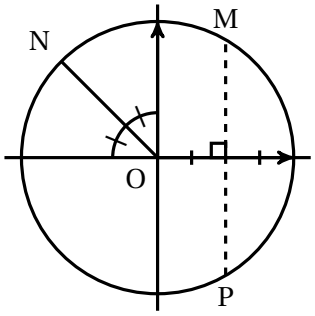


figure 1

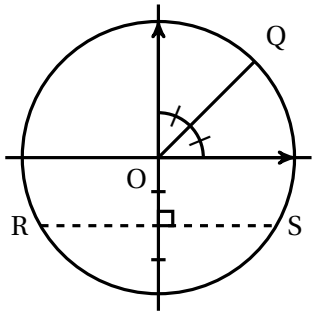


figure 2

1. Utiliser les informations de la figure 1 pour déterminer les angles, sur $[0;2\pi[$ repérant les points M, N et P.
2. Utiliser les informations de la figure 2 pour déterminer les angles, sur $]-\pi;\pi]$ repérant les points Q, R et S.

Exercice 4

Dans chaque cas, trouver l'angle x dans $]-\pi;\pi]$ (la mesure principale) correspondant à l'angle α donné :

1. $\alpha = \frac{7\pi}{2}$
2. $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$
3. $\alpha = \frac{35\pi}{6}$
4. $\alpha = -\frac{21\pi}{4}$
5. $\alpha = \frac{202\pi}{3}$

Exercice 5

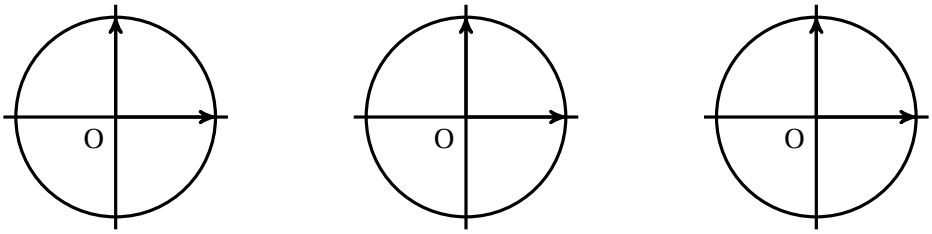
Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. (On pourra commencer par déterminer, si besoin, la mesure principale)

1. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
2. $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$
3. $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$
4. $\alpha = \dfrac{11\pi}{6}$
5. $\alpha = \dfrac{13\pi}{6}$
6. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
7. $\alpha = \dfrac{9\pi}{4}$
8. $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$
9. $\alpha = \dfrac{81\pi}{4}$
10. $\alpha = -\dfrac{108\pi}{4}$
11. $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$
12. $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
13. $\alpha = \dfrac{71\pi}{3}$
14. $\alpha = \dfrac{97\pi}{3}$
15. $\alpha = -\dfrac{54\pi}{3}$

Exercice 6

Sur le cercle trigonométrique colorier les arcs décrits par les intervalles $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ tels que :

$$\mathcal{I} = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \quad ; \quad \mathcal{J} = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}\right] \quad ; \quad \mathcal{K} = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right].$$



Exercice 7

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
2. $\sin(x) = 0$;
3. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$.

Exercice 8

1. À l'aide de la formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:
   a. déterminer $\cos(x)$ sachant que : $\sin(x) = \dfrac{2}{3}$ et $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;
   b. déterminer $\sin(x)$ sachant que : $\cos(x) = -\dfrac{1}{5}$ et $x \in [-\pi; 0]$;
   c. déterminer $\cos(x)$ sachant que : $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.
2. Démontrer que pour tout réel x on a :
   a. $\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x) - \sin(x)\big)^2 = 2$;
   b. $\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2 - \big(\cos(x) - \sin(x)\big)^2 = 4\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

1. $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;
2. $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$;
3. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;
4. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

DOC 18

CH06 - Trigonométrie - Exercices (Correction)

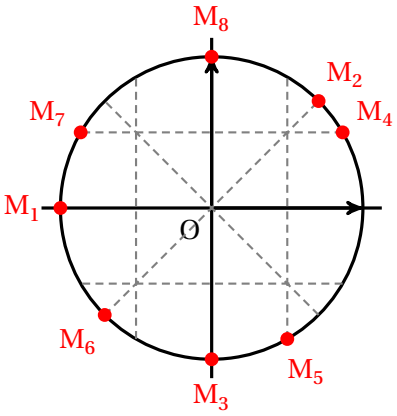
Exercice 1

On convertit en utilisant la proportionnalité $180° \leftrightarrow \pi^r$.

1. $10° = \frac{\pi}{18}^r \approx 0{,}175^r$; $59° \approx 1{,}030^r$; $180° = \pi^r$; $18° = \frac{\pi}{10}^r$; $72° = \frac{2\pi}{5}^r \approx 1{,}257^r$; $112{,}5° \approx 1{,}963^r$.
2. $\frac{\pi}{3} = 60°$; $\frac{2\pi}{3} = 120°$; $\pi = 180°$; $\frac{5\pi}{4} = 225°$; $\frac{3\pi}{8} = 67{,}5°$; $\frac{5\pi}{12} = 75°$; $\frac{3\pi}{2} = 270°$.

Exercice 2

On utilise le cercle trigo et le « découpage en parts de pizza » :



Exercice 3

On utilise le cercle trigo, en faisant attention à l'*intervalle d'étude* :

1. Pour M : on repère « cos = 0,5 et en haut », ce qui donne $\frac{\pi}{3}$ ✓

   Pour N : on repère « cos = ± sin et en haut à gauche », ce qui donne $\frac{3\pi}{4}$ ✓

   Pour P, on repère « cos = 0,5 et en bas », ce qui donne $\frac{-\pi}{3}$ ou ici $\frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ ✓
2. Pour Q : on repère « cos = sin et en haut à droite », ce qui donne $\frac{\pi}{4}$ ✓

   Pour R : on repère « sin = −0,5 et à gauche », ce qui donne $\frac{-5\pi}{6}$ ✓

   Pour S, on repère « sin = −0,5 et à droite », ce qui donne $\frac{-\pi}{6}$ ✓

Exercice 4

On réduit, à l'aide de la calculatrice, les résultats sont (bien évidemment) à 2π près (!) :

1. $\alpha = \frac{7\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$
2. $\alpha = -\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
3. $\alpha = \frac{35\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$
4. $\alpha = -\frac{21\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
5. $\alpha = \frac{202\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

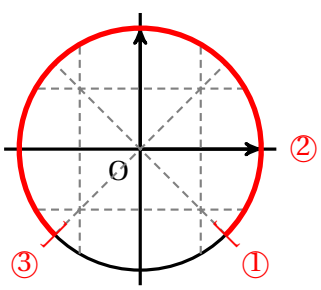
Exercice 5

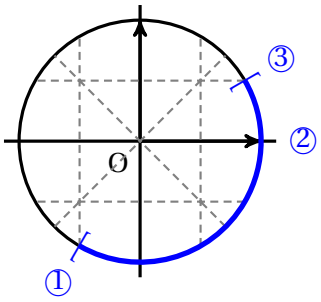
1. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{6}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$;
2. $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{5\pi}{6}$ et donc $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$;
3. $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ $\Rightarrow$ MP $= -\frac{5\pi}{6}$ et donc $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$;
4. $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ $\Rightarrow$ MP $= -\frac{\pi}{6}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$;
5. $\alpha = \frac{13\pi}{6}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{6}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$;
6. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
7. $\alpha = \frac{9\pi}{4}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
8. $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ $\Rightarrow$ MP $= -\frac{3\pi}{4}$ et donc $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
9. $\alpha = \frac{81\pi}{4}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
10. $\alpha = -\frac{108\pi}{4}$ $\Rightarrow$ MP $= -\pi$ et donc $\cos(\alpha) = -1$ et $\sin(\alpha) = 0$;
11. $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ $\Rightarrow$ MP $= -\frac{2\pi}{3}$ et donc $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
12. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{3}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
13. $\alpha = \frac{71\pi}{3}$ $\Rightarrow$ MP $= -\frac{\pi}{3}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
14. $\alpha = \frac{97\pi}{3}$ $\Rightarrow$ MP $= \frac{\pi}{3}$ et donc $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
15. $\alpha = -\frac{54\pi}{3}$ $\Rightarrow$ MP $= 0$ et donc $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = 0$.

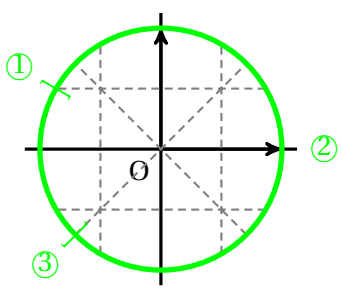
Exercice 6

On va placer les angles (à l'aide de la mesure principale) « bornes » des intervalles et parcourir le cercle :

- $\mathcal{I} = \left[-\frac{\pi}{4};0\right] \cup \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] = [①;②] \cup [②;③]$;
- $\mathcal{J} = \left[\frac{4\pi}{3};2\pi\right] \cup \left[2\pi;\frac{13\pi}{6}\right] = [①;②] \cup [②;③]$;
- $\mathcal{K} = \left[\frac{-7\pi}{6};0\right] \cup \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] = [①;②] \cup [②;③]$.

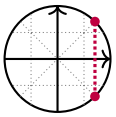




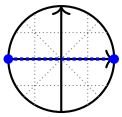


Exercice 7

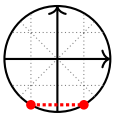
On utilise le cercle trigo pour « lire » les solutions :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: 

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \text{ entier.}$$

2. $\sin(x) = 0$: 

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \text{ entier.}$$

3. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: 

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \text{ entier.}$$

Exercice 8

1. **a.** $\sin(x) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ et $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b. $\cos(x) = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{24}{25}$ et $x \in [-\pi\,;0]$, donc $\sin(x) \leqslant 0$ et $\sin(x) = -\sqrt{\dfrac{24}{25}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

c. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, donc $\cos(x) \leqslant 0$ et $\cos(x) = -\sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{2}{3}$.

2. On va développer :

a. $\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x) - \sin(x)\big)^2$
$= \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin^2(x) = 2$;

b. $\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2 - \big(\cos(x) - \sin(x)\big)^2$
$= \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x) = 4\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 9

1. $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$; ainsi $\mathcal{S} = \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ avec k entier.

2. $1 - \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

ainsi $\mathcal{S} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} - 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} - 2k\pi \end{cases}$ avec k entier ;

3. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$; ainsi $\mathcal{S} = \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = \dfrac{13\pi}{24} + k\pi \end{cases}$ avec k entier ;

4. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; ainsi $\mathcal{S} = \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = 0 + k\pi \end{cases}$ avec k entier.

DOC 19

CH07 - Dérivation locale

I. Taux d'accroissement

Cadre

Soit I un intervalle contenant les deux nombres distincts a et b.
Soit f une fonction définie sur I, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

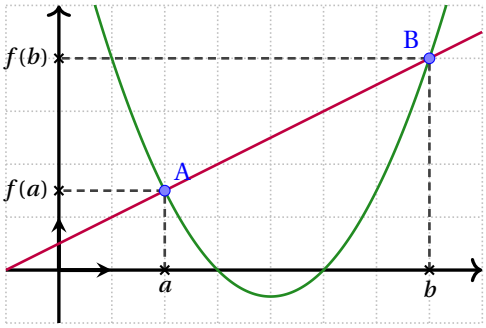
Définition

On appelle **taux d'accroissement de f entre a et b** le quotient noté $t_{f,a,b}$ égal à :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Graphiquement, le taux d'accroissement de f entre a et b est la **pente de la droite** (AB) où A et B sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

Illustration



Remarque

La courbe ayant pour équation $y=f(x)$, on a donc $t_{f,a,b}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
Si, en physique par exemple, la fonction mesure l'évolution d'une quantité C en fonction du temps t, le taux d'accroissement se notera plutôt $\dfrac{\Delta C}{\Delta t}$.

Exemple

Si on considère la fonction définie par $f(x)=0{,}5x^2-4x+7{,}5$ représentée ci-dessus, le taux d'accroissement de f entre 2 et 7 est :

$$t_{f,2,7}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{4-1{,}5}{7-2}=\frac{1}{2}.$$

II. Nombre dérivé

Intro

Considérons un point A fixe sur la courbe $\mathcal{C}_f$, d'abscisse a, et un point M **mobile** sur la même courbe, d'abscisse $a+h$ (h correspondant donc à l'*écart* entre A et M sur l'axe des abscisses).
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ se note donc

$$t_{f,a,a+h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition

Si le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ devient aussi proche que l'on veut d'une valeur limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque h se rapproche de 0, on dit que la fonction f est **dérivable en** a.
La valeur limite ℓ est alors appelée **nombre dérivé de** f **en** a, que l'on note $f'(a)$. On a alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Logiciel

Avec la même fonction que ci-dessus, $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 7{,}5$ et $a = 2$, on tabule le taux d'accroissement :

	A	B	C	D
1	f(x)=0,5x²-4x+7,5		a= 2	
2				
3	**h**	**a+h**	**f(a+h)**	**taux d'accroissement**
4	-5	-3	24	-4,5
5	-2	0	7,5	-3
6	-1	1	4	-2,5
7	-0,5	1,5	2,625	-2,25
8	-0,4	1,6	2,38	-2,2
9	-0,3	1,7	2,145	-2,15
10	-0,2	1,8	1,92	-2,1
11	-0,1	1,9	1,705	-2,05
12	-0,01	1,99	1,52005	-2,005
13	-0,001	1,999	1,5020005	-2,0005
14	-0,0001	1,9999	1,50020001	-2,00005
15	0	2	1,5	#DIV/0!
16	0,0001	2,0001	1,49980001	-1,99995
17	0,001	2,001	1,4980005	-1,9995
18	0,01	2,01	1,48005	-1,995
19	0,1	2,1	1,305	-1,95
20	0,2	2,2	1,12	-1,9
21	0,3	2,3	0,945	-1,85
22	0,5	2,5	0,625	-1,75
23	1	3	0	-1,5
24	2	4	-0,5	-1
25	4	6	1,5	0

On remarque bien que le taux d'accroissement **semble** se rapprocher de -2 lorsque h tend vers 0.
On peut démontrer ce résultat par le calcul :

- le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$;
- $f(2) = 0{,}5\times 2^2 - 4\times 2 + 7{,}5 = 1{,}5$
- $f(2+h) = 0{,}5(2+h)^2 - 4(2+h) + 7{,}5 = 0{,}5(4+4h+h^2) - 8 - 4h + 7{,}5 = 2 + 2h + 0{,}5h^2 - 8 - 4h + 7{,}5 = 0{,}5h^2 - 2h + 1{,}5$
- donc le taux d'accroissement est $\dfrac{0{,}5h^2 - 2h + 1{,}5 - 1{,}5}{h} = \dfrac{0{,}5h^2 - 2h}{h} = \dfrac{h(0{,}5h-2)}{h} = 0{,}5h - 2.$

Ainsi, lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers $0{,}5\times 0 - 2 = -2$
Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = -2$!

Remarque

Il est possible que le taux d'accroissement ne se rapproche pas d'une valeur particulière, ou qu'il se rapproche de l'infini quand h tend vers 0. Dans ce cas, la fonction n'est pas dérivable. C'est le cas par exemple de la fonction racine carrée avec $a = 0$:
En effet, le taux d'accroissement de la fonction racine carrée entre 0 et $0 + h$ est :

$$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

qui se rapproche de l'infini lorsque h tend vers 0 !

Illustration

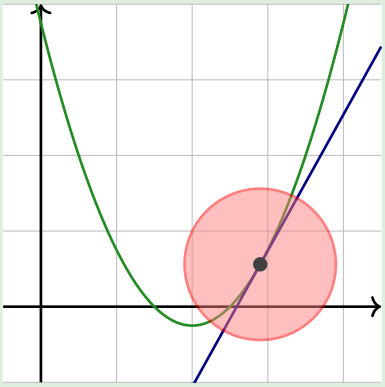
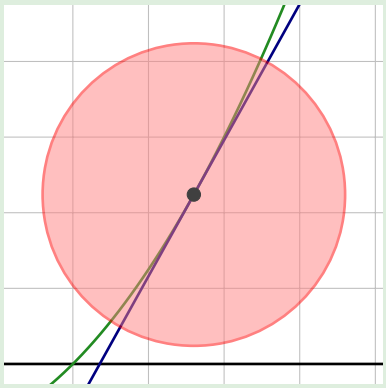
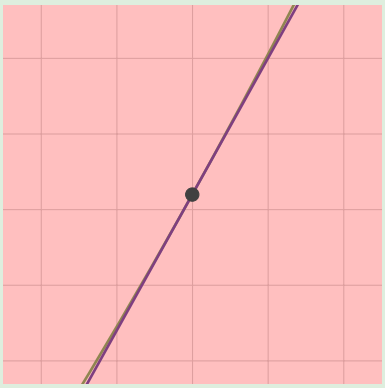
Graphiquement, que se passe-t-il ?

	Le point M	**La droite (AM)**	**Le taux d'accroissement**
Lorsque h varie	se déplace sur la courbe	pivote autour de A	varie
Lorsque $h = 0$	se confond avec A	disparaît	n'existe pas
Lorsque h tend vers 0	se rapproche de A	"frôle" la courbe	se rapproche d'un nombre

III. Tangente

Définition

Si la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est bien « lisse » au voisinage d'un point A, on appelle **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en A une droite qui épouse localement la direction de cette courbe. Autrement dit, en zoomant autour du point A, la courbe va finir par sembler se confondre avec sa tangente en ce point.

Remarque

Avec les notations précédentes, lorsque h tend vers 0, la position **limite** de la droite (AM) est la **tangente** $\mathcal{T}_a$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a.
Donc la valeur limite de la pente de (AM) est la pente de la tangente.
Ainsi, le nombre dérivé $f'(a)$ est la **pente de la tangente** au point d'abscisse a.

Propriété : interprétation graphique du nombre dérivé

Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est la **pente de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
Cette tangente, au point d'abscisse a, a donc pour équation :

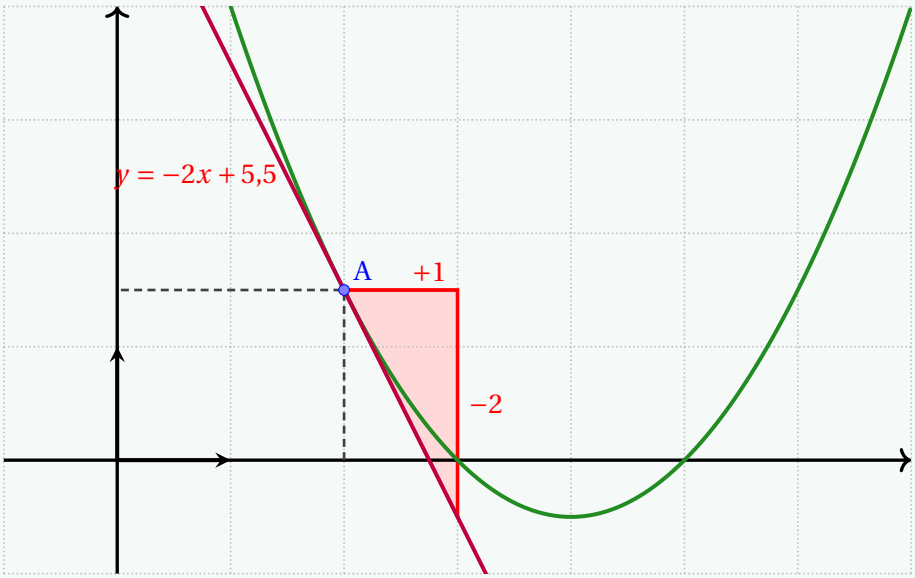
$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Démonstration

La tangente au point d'abscisse a est une droite d'équation $y = mx + p$.
On sait que sa pente est $p = f'(a)$, et on sait qu'elle passe par le point $A(a; f(a))$ donc les coordonnées de A doivent vérifier $y_A = f'(a) \times x_A + p$ soit $f(a) = f'(a) \times a + p$ donc $p = f(a) - f'(a) \times a$.
L'équation de la tangente est donc $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Exemple

Toujours avec le même exemple, on a prouvé par le calcul que le nombre dérivé était $f'(2) = -2$.
On peut vérifier graphiquement que la tangente au point d'abscisse 2 a bien une pente égale à -2.



La tangente a donc pour équation $y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$ soit $y = -2 \times (x-2) + 1{,}5$ ou encore, en développant, $y = -2x + 5{,}5$.

Logiciel

Logiciel de Calcul Formel Xcas

1 : $x \mapsto 0.5 * x^2 - 4 * x + 7.5$ MENU
2 : -2 MENU
3 : $-2 * x + 5.5$ MENU
4 : $-2 * x + 5.5$ MENU

DOC 20

CH07 - Dérivation locale - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(3)$ puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de $f'(3)$.
2. En déduire une équation de T_3, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Exercice 2

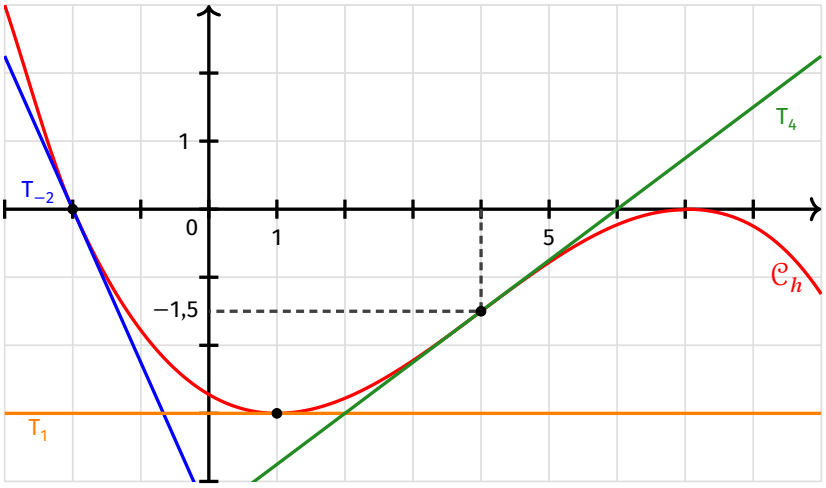
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. Calculer $g(1)$.
2. On admet que, pour $h\neq 0$, on a $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\dfrac{-h-2}{h^2+2h+2}$.

   En déduire que g est dérivable en $a=1$ et déterminer la valeur de $g'(1)$ (on pourra vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice).
3. Déterminer une équation de T_1, tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Exercice 3

On considère une fonction h, définie sur $[-3;9]$, dont la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est donnée ci-dessous.



Les droites T_{-2}, T_1 et T_4 sont les tangentes à $\mathcal{C}_h$ aux points d'abscisses respectifs -2 ; 1 et 4.

1. Expliquer pourquoi, graphiquement, la fonction h semble être dérivable en toute valeur de $[-3;9]$.
2. Donner, par lecture graphique :
   a. les valeurs de $h(4)$ et $h'(4)$;
   b. les valeurs de $h(1)$ et $h'(1)$;
   c. le signe de $h'(-2)$.
3. Déterminer une équation de T_1 puis une équation de T_4.

Bonus Sur quel(s) intervalle(s) peut-on affirmer que $h'(x)\geqslant 0$.

Exercice 4

Dans cet exercice, on va essayer de préparer la transition **« dérivation locale » ...🚲... « dérivation globale »**.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a. En utilisant la technique du « taux d'accroissement », déterminer la valeur de $f'(1)$.

b. En utilisant la technique du « taux d'accroissement », déterminer la valeur de $f'(2)$.

c. Soit maintenant a un réel quelconque.

On admet que, pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h$.

En déduire que f est dérivable en a, puis déterminer la valeur de $f'(a)$.

d. En utilisant la formule obtenue à la question **1.c.**, expliquer comment on peut retrouver – facilement – les résultats des questions **1.a.** et **1.b.**.

NB : on vient en fait de déterminer la « fonction dérivée » de la fonction carrée !

2. On considère désormais la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les valeurs de $g'(2)$, $g'(4)$ et $g'(-5)$.

b. Conjecturer une formule permettant de calculer $g'(a)$ pour tout réel a non nul.

c. Soit donc a un réel non nul.

i. Déterminer, en fonction de a, les valeurs de $g(a)$ et de $g(a+h)$.

ii. En déduire, pour $h \neq 0$, une écriture simplifiée de $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$.

iii. En déduire que g est dérivable en a, puis déterminer la valeur de $g'(a)$.

iv. Comparer avec la conjecture faite en **2.b.**.

NB : on vient en fait de déterminer la « fonction dérivée » de la fonction inverse !

Exercice 5

On considère le script ALGO python suivant :

Code Python

```
1  def f(x):
2      return x**2
3
4  def g(x):
5      return 1/x
6
7  def mystere(fonc,a,h):
8      return (fonc(a+h)-fonc(a))/h
```

1. Dans cette question, on se réfèrera aux données et résultats de l'exercice 4.

a. De quelle valeur le résultat obtenu à l'aide de la commande `mystere(f,2,0.0001)` est-il très proche ?

b. De quelle valeur le résultat obtenu à l'aide de la commande `mystere(g,-5,0.0001)` est-il très proche ?

2. On souhaiterait utiliser le script précédent pour vérifier le résultat obtenu à la question **2.** de l'exercice 2.

a. Proposer une modification de la ligne `L5` afin de déclarer la fonction g.

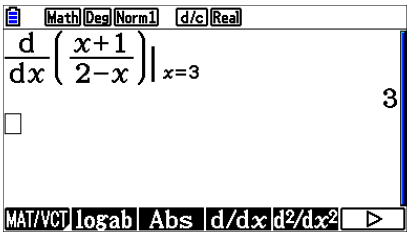
b. Quelle `commande`, utilisant la fonction `mystere()` permettrait de répondre à la problématique ?

DOC 21

CH07 - Dérivation locale - Exercices (Correction)

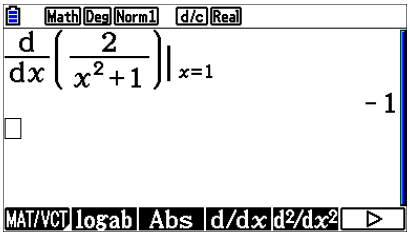
Exercice 1

1. On obtient $f(3) = \dfrac{3+1}{2-3} = \dfrac{4}{-1} = -4$ et la calculatrice donne $f'(3) = 3$.
2. Une équation de T_3 est $y = f'(3) \times (x-3) + f(3) = 3(x-3) + (-4) = 3x - 9 - 4 = 3x - 13$.



Exercice 2

1. On a $g(1) = \dfrac{2}{1^2+1} = \dfrac{2}{2} = 1$.
2. On a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h-2}{h^2+2h+2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.
   Ceci justifie que g est dérivable en $a = 1$ et que $g'(1) = -1$.
3. Une équation de T_1 est $y = g'(1) \times (x-1) + g(1) = -1(x-1) + 1 = -x + 2$.



Exercice 3

1. La fonction h semble être dérivable en toute valeur de $[-3;9]$ car la courbe $\mathcal{C}_h$ est « bien lisse ».
   Il n'y a pas de « cassure verticale », de « verticalité » ou de « point anguleux ».
2. On rappelle que $h(\ldots)$ correspond à la *hauteur de la courbe*, et $h'(\ldots)$ à la pente de la tangente :
   a. $h(4) = -1{,}5$ et $h'(4) =$ pente de $T_4 = \dfrac{3}{4}$;
   b. $h(1) = -2$ et $h'(1) =$ pente de $T_1 = 0$;
   c. $h'(-2)$ est (strictement) négatif, car T_2 est décroissante.
3. Une équation de T_1 est $y = h'(1) \times (x-1) + h(1) = 0(x-1) + (-2) = -2$ (horizontale !).
   Une équation de T_4 est $T_4 = h'(4) \times (x-4) + h(4) = 0{,}75(x-4) + (-1{,}5) = 0{,}75x - 3 - 1{,}5 = 0{,}75x - 4{,}5$.

Bonus $h'(x) \geqslant 0$ signifie que h est croissante, donc $h'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [1;7]$.

Exercice 4

Cet exercice correspond à l'activité d'introduction du **chapitre 8**, sur les fonctions dérivées.

Exercice 5

1. **a.** La commande `mystere(f,2,0.0001)` va calculer $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $f(x)=x^2$ et pour $h=0{,}0001$.

On cherche donc à « estimer » $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ soit encore $f'(2)$, qui vaut (environ) 4.

b. La commande `mystere(f,2,0.0001)` va calculer $\dfrac{g(-5+h)-g(-5)}{h}$ pour $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et pour $h=0{,}0001$.

On cherche donc à « estimer » $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-5+h)-g(-5)}{h}$ soit encore $g'(-5)$, qui vaut (environ) $-0{,}04=\frac{-1}{25}$.

Début de la console python

```
>>> mystere(f,2,0.0001)
4.0001000000078335
>>> mystere(g,-5,0.0001)
-0.040000800015926874
```

Fin de la console python

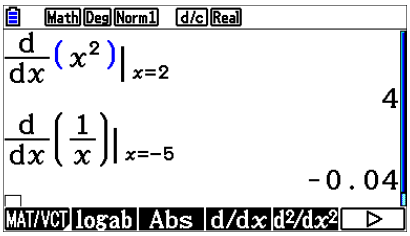
2. **a.** Pour se référer à l'exercice l'exercice 2, on doit déclarer la fonction $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$ en `return 2/(x**2+1)`.

b. La commande `mystere(g,1,0.0001)` donnerait un résultat proche de $g'(1)=-1$.

Début de la console python

```
>>> def g(x):
...     return 2/(x**2+1)
...
>>> mystere(g,1,0.0001)
-0.9999500000001937
```

Fin de la console python



DOC 22

CH08 - Fonctions dérivées

I. Rappels

Propriété - Rappel

Une fonction est f est **dérivable en** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, cette limite étant le **nombre dérivé** $f'(a)$.
Graphiquement, ce nombre dérivé est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exemple

On a déjà cherché certains nombres dérivés de la fonction carré :
si $f(x)=x^2$, alors $f'(1)=2$, $f'(2)=4$ et on avait également déterminé que $f'(a)=2a$ pour un a quelconque.
De même avec la fonction $f(x)=1/x$, on a obtenu $f'(a)=-1/a^2$ pour un a quelconque non nul.

II. Calculs de fonctions dérivées

II.1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si la fonction f est dérivable en tout réel a de I, on dit alors que la fonction est **dérivable sur l'intervalle** I.
Pour chaque nombre a de I, on peut donc trouver le nombre dérivé $f'(a)$. Grâce à ce mécanisme, on définit une fonction : la **fonction dérivée** de la fonction f, que l'on note f'.

II.2. Fonctions de référence

Théorème

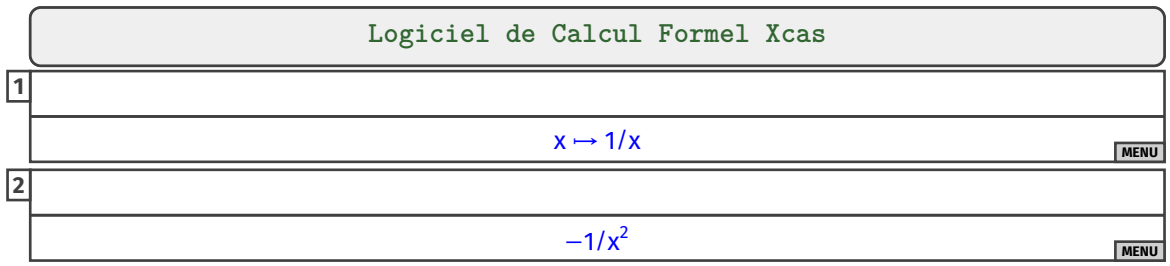
Les fonctions affines, carré, cube, inverse sont dérivables sur leur ensemble de définition.
La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ mais pas en 0.
Leurs fonctions dérivées sont données dans le tableau ci-dessous :

Nom de la fonction f	Expression de la fonction f	Expression de la dérivée f'
Constante	$f(x)=k$	$f'(x)=0$
Affine	$f(x)=mx+p$	$f'(x)=m$
Carré	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
Cube	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
Puissance n	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
Inverse	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$
Racine	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstrations

- **Pour la fonction carré** : cherchons le nombre dérivé en x de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
  Il faut d'abord calculer le taux d'accroissement de cette fonction entre x et $x+h$:
  $$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$
  puis chercher la limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0.
  Cette limite est $2x$, donc la dérivée de la fonction carré est $f'(x) = 2x$ pour tout x.on l'a fait précédemment.
- **Pour la fonction inverse** : Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. La méthode est la même :
  $$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$
  et la limite de ce quotient quand h tend vers 0 est $\dfrac{-1}{x^2}$.
  Ainsi, $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$.
- Les autres formules de dérivation sont admises mais sont à connaître sans faute.

Logiciel



Exemple

La fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^8$ est la fonction f' telle que $f'(x) = 8x^7$.

Exercice

Si f est la fonction inverse, et qu'on cherche à déterminer $T_{0,5}$; on sait que cette tangente a pour équation $y = f'(0{,}5)(x - 0{,}5) + f(0{,}5)$. On a déjà $f(0{,}5) = 1/0{,}5 = 2$; mais jusque là, le calcul de $f'(0{,}5)$ était compliqué…
Désormais, on peut se contenter d'utiliser la formule de $f'(x)$: c'est $-1/x^2$ donc $f'(0{,}5) = -1/0{,}5^2 = -4$.
La tangente a donc pour équation $y = -4(x - 0{,}5) + 2 = -4x + 2 + 2 = -4x + 4$.

II.3. Opérations de base sur les fonctions

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables et k un nombre réel. Alors les fonctions construites à partir de u et v sont dérivables. Voilà comment calculer leur fonction dérivée :

- Pour certaines, c'est très intuitif (somme, produit par une constante) :
  somme : $(u+v)' = u' + v'$. Une somme se dérive terme à terme.
  produit par une constante : $(k \times u)' = k \times u'$.
- Et pour d'autres, ça l'est beaucoup moins (produit, quotient) :
  produit : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.
  quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

Exemples

1. $f(x) = x^2 + 5x - 7$: f est une somme et $f'(x) = 2x + 5$
2. $g(x) = 7x^3$: g est le produit de la fonction cube (x^3) par une constante (7) et $g'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$
3. $h(x) = x\sqrt{x}$
   h est le produit d'une fonction affine ($u = x$) et de la fonction racine ($v = \sqrt{x}$). Pour la dériver, il faut d'abord trouver la dérivée de chacun des facteurs ($u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$) puis appliquer la formule :
   $$h'(x) = u' \times v + u \times v' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
4. $q(x) = \dfrac{2x-3}{7x+1}$
   q est le quotient de deux fonctions affines ($u = 2x - 3$ et $v = 7x + 1$). Pour la dériver, on calcule d'abord la dérivée du numérateur (2) et celle du dénominateur (7) puis on applique la formule :
   $$q' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} = \frac{2 \times (7x+1) - (2x-3) \times 7}{(7x+1)^2} = \frac{14x + 2 - (14x - 21)}{(7x+1)^2} = \frac{23}{(7x+1)^2}$$

Remarques

- $u - v = u + (-1) \times v$ donc $(u-v)' = u' + (-1) \times v' = u' - v'$ donc une différence de deux fonctions est aussi naturelle à dériver qu'une somme.
- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{0 \times v - 1 \times v'}{v^2} = \dfrac{-v'}{v^2}$. On obtient la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction à partir de celle du quotient, en prenant $u = 1$ et donc $u' = 0$.
- on peut être amené à combiner ces différentes formules entre elles : par exemple, $f(x) = 5x^2 - \dfrac{3}{4}x + 1$ a pour dérivée $f'(x) = 5 \times 2x - \dfrac{3}{4} = 10x - \dfrac{3}{4}$. On a combiné addition et multiplication par constante.

Méthode

Pour dériver une fonction :

- On commence toujours par repérer de **quelle forme** est cette fonction (fonction de référence? somme? produit? quotient? composée?).
- On choisit alors la **formule de dérivation** adaptée.
- Si cette formule est celle d'une opération (celles avec des u et des v!), on **repère** ce que sont u, v ou k.
- On **calcule** les dérivées u' et v' si besoin.
- On **applique la formule** choisie.
- On **réduit**, en gardant à l'esprit qu'on ne **développe jamais un dénominateur**!

Exercice

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - x + 8$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{3x-2}$
3. $k(x) = x^5(3x^2 + 5x)$

Démonstration de la formule de dérivation d'un produit

On revient à la définition en cherchant le taux d'accroissement de la fonction f !

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x+h)+u(x)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{[u(x+h)-u(x)]\times v(x+h)}{h}+\frac{u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+u(x)\times\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\end{aligned}$$

On reconnaît alors les taux d'accroissement des fonctions u et v.
A la limite lorsque h tend vers 0, les taux d'accroissement tendent vers les nombres dérivés $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$; quant à $v(x+h)$, il tend vers $v(x)$.
On obtient donc bien : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$ soit $f'=u'v+uv'$.

III. Fonctions composées

III.1. Définition

Définition

Quand on applique une fonction à une variable x et qu'on applique au résultat obtenu une autre fonction (on « monte » donc successivement deux fonctions), on dit qu'on **compose** ces deux fonctions.
La fonction qui en résulte s'appelle une **fonction composée**.

Exemple

La fonction f définie par $f(x)=(2x-3)^3$ est la composée de la fonction affine u définie par $u(x)=2x-3$ et de la fonction cube.

La fonction g définie par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction racine.

On parle de composée quand on retrouve « à l'intérieur » d'une fonction non pas juste la variable x, mais une autre expression.

III.2. Dérivation

Théorème

Si une fonction f est la composée d'une fonction affine $x\mapsto mx+p$ suivie d'une fonction u dérivable, c'est-à-dire si f est de la forme $f(x)=u(mx+p)$,
alors elle est dérivable et sa fonction dérivée est $f'(x)=m\times u'(mx+p)$.

Exemples

- $f(x)=(3x-2)^5$
  ici $mx+p=3x-2$ et $u(x)=x^5$
  comme $u'(x)=5x^4$, on a $f'(x)=3\times u'(mx+p)=3\times 5(3x-2)^4=15(3x-2)^4$.
- $g(x)=\sqrt{7x}$
  ici $mx+p=7x$ et $u(x)=\sqrt{x}$
  comme $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on a $g'(x)=7\times u'(7x)=7\times\dfrac{1}{2\sqrt{7x}}=\dfrac{7}{2\sqrt{7x}}$.

DOC 23

CH08 - Fonctions dérivées - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

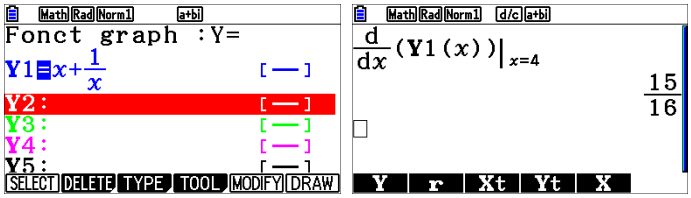
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

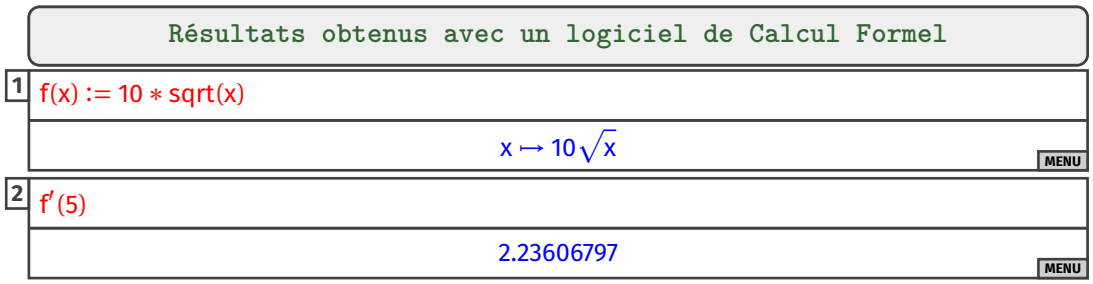
1. Calculer $f(3)$.
2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. En déduire la valeur de $f'(3)$.
   c. Déterminer une équation de $\mathcal{T}_3$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer une équation de $\mathcal{T}_{-1}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

Exercice 2

1. Justifier le résultat obtenu sur les captures d'écran calculatrice suivantes :



2. Justifier le résultat de la ligne L2 suivante :



Exercice 3

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité :
   a. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;
   b. $g(x) = 5x + \dfrac{2}{x}$;
   c. $h(x) = 4\sqrt{x} - 7x$.
2. Déterminer une équation de :
   a. $\mathcal{T}_2$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 ;
   b. $\mathcal{T}_{-1}$, tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -1 ;
   c. $\mathcal{T}_9$, tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 9 ;

Exercice 4

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \left(x^2+1\right) \times \left(-x^3+2x^2+5\right)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = (x+1)\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$;
   ☞ *on essayera de simplifier en mettant au même dénominateur…*
3. $h(x) = \dfrac{3x+1}{x-5}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{5\right\}$;
   ☞ *on essayera de simplifier le numérateur…*
4. $k(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2+1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   ☞ *on essayera de simplifier en mettant au même dénominateur…*

Exercice 5

En utilisant les formules de « dérivation composée », déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3x+1)^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = \sqrt{2x+1}$ définie sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$;
3. $h(x) = \sqrt{x-2}\left(x^2-1\right)$ définie sur $[2;+\infty[$ et dérivable sur $]2;+\infty[$.

Exercice 6

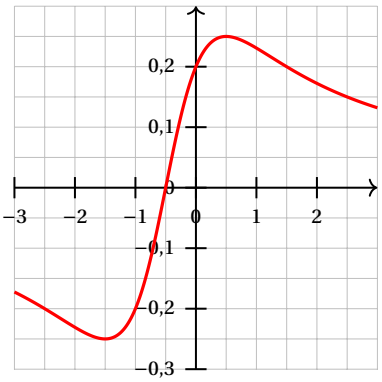
On considère la fonction f définie sur $[0;7]$ par $f(x) = x^3 - 11x^2 + 39x - 20$.

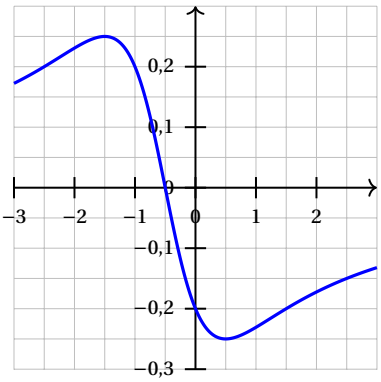
1. Déterminer, pour tout x de $[0;7]$, l'expression de $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;7]$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;7]$.

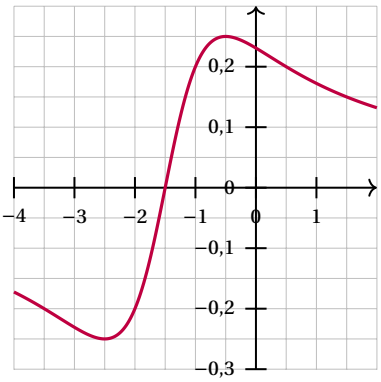
Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. En travaillant sur le dénominateur de f, démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{-8x^2-8x+6}{\left(4x^2+4x+5\right)^2}$.
3. Étudier, dans un tableau, le signe de $f'(x)$.
4. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Parmi les trois courbes suivantes, laquelle pourrait être – sans utiliser de calculatrice – $\mathcal{C}_f$? Justifier.







DOC 24

CH08 - Fonctions dérivées - Exercices (correction)

Exercice 1

1. On a $f(3) = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$.
2. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   b. Ainsi on a $f'(3) = 3 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 34$.
   c. Une équation de $\mathcal{T}_3$ est $y = f'(3) \times (x-3) + f(3) = 34 \times (x+2) + 40 = 34x - 102 + 40 = 34x - 62$.
3. De même une équation de $\mathcal{T}_{-1}$ est $y = f'(-1) \times (x-(-1)) + f(-1) = 2 \times (x+1) + 0 = 2x + 2$.
   Avec $\begin{cases} f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \\ f'(-1) = 3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = 2 \end{cases}$.

Exercice 2

1. La calculatrice nous suggère que $f'(4) = \dfrac{15}{16}$ avec $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
   En effet, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ de sorte que $f'(4) = 1 - \dfrac{1}{4^2} = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{16}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$ ✓.
2. Le logiciel Xcas nous suggère que $f'(5) \approx 2{,}23606797$ avec $f(x) = 10\sqrt{x}$.
   En effet, on a $f'(x) = 10 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ de sorte que $f'(5) = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \approx 2{,}23606797$ ✓.

Exercice 3

1. a. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 5 = 6x^2 + 8x - 5$.
   b. $g(x) = 5x + \dfrac{2}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = 5 + 2 \times \dfrac{-1}{x^2} = 5 - \dfrac{2}{x^2}$.
   c. $h(x) = 4\sqrt{x} - 7x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $h'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 7 = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7$.
2. a. Une équation de $\mathcal{T}_2$ est $y = f'(2) \times (x-2) + f(2) = 35 \times (x-2) + 28 = 35x - 70 + 28 = 35x - 42$.
   Avec $\begin{cases} f(2) = 2 \times 2^3 + 4 \times 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 35 \\ f'(2) = 6 \times 2^2 + 8 \times 2 - 5 = 28 \end{cases}$.
   b. Une équation de $\mathcal{T}_{-1}$ est $y = g'(-1) \times (x-(-1)) + g(-1) = 3 \times (x+1) + (-7) = 3x + 3 - 7 = 3x - 4$.
   Avec $\begin{cases} g(-1) = 5 \times (-1) + \dfrac{2}{-1} = -7 \\ g'(-1) = 5 - \dfrac{2}{(-1)^2} = 3 \end{cases}$.
   c. Une équation de $\mathcal{T}_9$ est $y = h'(9) \times (x-9) + h(9) = -\dfrac{19}{3} \times (x-9) + (-51) = -\dfrac{19}{3}x + 6$.
   Avec $\begin{cases} h(9) = 4 \times \sqrt{9} - 7 \times 9 = 12 - 63 = -51 \\ h'(9) = \dfrac{2}{\sqrt{9}} - 7 = \dfrac{2}{3} - 7 = -\dfrac{19}{3} \end{cases}$.

Exercice 4

1. La fonction f est un produit $u \times v$ avec :

$$\begin{cases} u = x^2+1 \\ v = -x^3+2x^2+5 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u' = 2x \\ v' = 3x^2+4x \end{cases}.$$

Ainsi $f'(x) = u'v + v'u = 2x \times \left(-x^3+2x^2+5\right) + \left(3x^2+4x\right) \times \left(x^2+1\right)$ pour tout réel x.

2. La fonction g est un produit $u \times v$ avec :

$$\begin{cases} u = x+1 \\ v = \sqrt{x} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u' = 1 \\ v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}.$$

Ainsi $g'(x) = u'v + v'u = 1 \times \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (x+1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x+x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$.

3. La fonction h s'écrit sous forme d'un quotient $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{cases} u = 3x+1 \\ v = x-5 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u' = 3 \\ v' = 1 \end{cases}.$$

Ainsi $h'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{3 \times (x-5) - 1 \times (3x+1)}{(x-5)^2} = \dfrac{3x-15-3x-1}{(x-5)^2} = \dfrac{-16}{(x-5)^2}$ pour $x \neq 5$.

4. La fonction k s'écrit avec une somme et un quotient :

$(2x)' = 2$ et $\left(\dfrac{2}{x^2+1}\right)' = \dfrac{0 \times \left(x^2+1\right) - 2x \times 1}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Ainsi $k'(x) = 2 + \dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2 \times \left(x^2+1\right)^2 - 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x^4+4x^2+2-2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x^4+4x^2-2x+2}{\left(x^2+1\right)^2}$ pour tout x.

Exercice 5

1. $f(x) = (3x+1)^3$ est sous la forme u^3 avec $u = 3x+1$ et donc $u' = 3$.

On a donc $f'(x) = 3 \times u' \times u^2 = 3 \times 3 \times (3x+1)^2 = 9(3x+1)^2$ pour tout x.

2. $g(x) = \sqrt{2x+1}$ est sous la forme $\sqrt{u}$ avec $u = 2x+1$ et donc $u' = 2$.

On a donc $g'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ pour tout $x > -0{,}5$.

3. $h(x) = \sqrt{x-2}\left(x^2-1\right)$ est sous forme d'un produit :

$u = \sqrt{x-2}$ qui donne $u' = \dfrac{(x-2)'}{2\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ et $v = x^2-1$ qui donne $v' = 2x$.

On a donc $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \times \left(x^2-1\right) + 2x \times \sqrt{x-2}$ pour tout $x > 2$.

Exercice 6

1. La fonction f est dérivable sur $[0;7]$ et $f'(x) = 3x^2 - 11 \times 2x + 39$.

2. $f'(x)$ est un trinôme du second degré, on utilise donc Δ :

$\Delta = (-22)^2 - 4 \times 3 \times 39 = 4$ et donc $\begin{cases} x_1 = \frac{-(-22)+\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{22+4}{6} = \frac{13}{3} \\ x_2 = \frac{-(-22)-\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{22-4}{6} = 3 \end{cases}$ et le signe de $a = 3$ est positif.

Ainsi on a :

x	0		3		$\frac{13}{3}$		7
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

3. D'après les « travaux » du chapitre 07, on peut dire que :

- sur $[0;3]$, la fonction f est croissante ;
- sur $\left[3;\frac{13}{3}\right]$, la fonction f est décroissante ;
- sur $\left[\frac{13}{3};7\right]$, la fonction f est croissante.

Exercice 7

1. Les éventuelles valeurs interdites de f sont les racines de $4x^2+4x+5$.

Or $\Delta = -64$, donc le dénominateur ne s'annule pas, ce qui justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'écrit sous forme d'un quotient avec :

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ v = 4x^2+4x+5 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u' = 2 \\ v' = 8x+4 \end{cases}.$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{2\times\left(4x^2+4x+5\right) - (8x+4)\times(2x+1)}{\left(4x^2+4x+5\right)^2}$.

Soit encore $f'(x) = \dfrac{8x^2+8x+10-16x^2-8x-8x-4}{\left(4x^2+4x+5\right)^2} = \dfrac{-8x^2-8x+6}{\left(4x^2+4x+5\right)^2}$ pour tout x.

3. La fonction $f'(x)$ est bien sous forme de quotient :

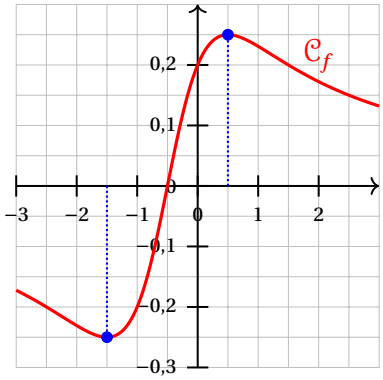
- le dénominateur est le carré d'une expression ne s'annulant jamais, donc il est strictement positif ;
- le numérateur est un trinôme, donc $\Delta = 256$ qui donne $\begin{cases} x_1 = -1{,}5 \\ x_2 = 0{,}5 \end{cases}$ avec $a = -8$ négatif.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
NUM		−	0	+	0	−	
DÉNOM		+		+		+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

4. D'après les « travaux » du chapitre 07, on peut dire que :

- sur $]-\infty;-1{,}5]$, la fonction f est décroissante ;
- sur $[-1{,}5;0{,}5]$, la fonction f est croissante ;
- sur $[0{,}5;+\infty[$, la fonction f est décroissante.

5. La seule courbe « compatible » avec les variations précédentes est :



DOC 25

CH09 - Suites arithmétiques, géométriques

Cadre

Ce chapitre porte sur l'étude de deux types de suites particulières : les suites arithmétiques et les suites géométriques. Ces suites ont la particularité de permettre de passer très facilement de la **formule de récurrence** à la **formule explicite**!

I. Suites arithmétiques

I.1. Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** r, appelé **raison** de la suite.
Autrement dit, une suite est **arithmétique** si sa formule de récurrence est du type :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Exemple

La suite des nombres impairs $1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - \ldots$ est arithmétique de raison 2.

Remarque

Une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en *retranchant* toujours le même nombre est également arithmétique, mais sa raison est négative.
Ainsi, la suite $12 - 11{,}5 - 11 - 10{,}5 - 10 - 9{,}5 - \ldots$ est arithmétique de raison $-0{,}5$.

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique :

- soit on transcrit le texte de l'énoncé sous forme de formule de récurrence,
- soit on calcule la **différence** $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs et on montre que cette différence est constante et ne dépend pas de n.
  Le résultat de ce calcul est alors la **raison** r de la suite.

Exemple

On va démontrer que la suite définie par $u_n = 2n - 3$ pour tout $n \geqslant 0$ est arithmétique.

- on calcule u_{n+1} : $u_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n - 1$;
- puis la différence : $u_{n+1} - u_n = (2n-1) - (2n-3) = -1 + 3 = 2$.

Le résultat ne dépend plus de n, donc la suite est **arithmétique** de raison $r = 2$.

I.2. Formule explicite

Propriété

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_0. Alors :

$$u_n = u_0 + n \times r \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque

Si le premier terme de la suite n'est pas u_0 mais u_1, on a la propriété :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

et, pour n'importe quel rang p :

$$u_n = u_p + (n-p) \times r \quad \text{pour tout } n \geqslant p.$$

Démonstration

$u_1 = u_0 + r$;
$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$;
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$;
$\vdots$
$u_n = u_{n-1} + r = u_0 + (n-1) \times r + r = u_0 + n \times r$.

Exemple

Ma tirelire contient 23 €. Au 1er janvier de cette année, j'ai décidé d'y mettre 5 € tous les mois. Quelle somme contiendra-t-elle à la fin de l'année ?

- La suite (t_n) où t_n est la somme contenue dans la tirelire à la fin du n-ième mois d'économie est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $t_0 = 23$.
- À la fin de l'année, il y aura dans la tirelire $t_{12} = t_0 + 12 \times r = 23 + 12 \times 5 = 83$ €.

I.3. Sens de variation

Propriété

Une suite **arithmétique** est toujours **monotone**. Elle est **croissante** si sa **raison** est **positive**, et décroissante si sa raison est négative.

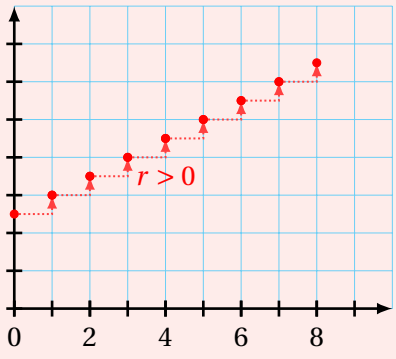
Démonstration

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, et dans le cas d'une suite arithmétique, cette différence est égale à la raison r !

I.4. Modélisation

Propriété

Les points du nuage qui représente une suite (u_n) **arithmétique** de raison r sont tous **alignés**, sur la **droite** de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0.



Démonstration

Le point de coordonnée $(0\,;u_0)$ est bien un point du nuage, et pour une unité supplémentaire en abscisse (c'est-à-dire au rang d'après), les ordonnées augmentent de r : on retrouve bien la définition du coefficient directeur d'une droite. On remarquera également la cohérence entre le sens de variation d'une fonction affine et celui d'une suite arithmétique…

Propriété

Les suites **arithmétiques** modélisent des évolutions successives à **accroissements constants**. On parle également dans ce cas d'**évolution linéaire**.

I.5. Somme des premiers termes

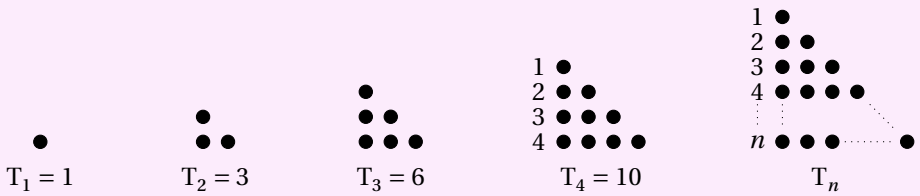
Théorème

Pour tout entier naturel n non nul,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

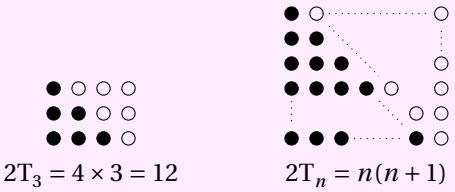
Démonstration

Notons $\mathrm{T}_n = 1+2+\cdots+n$ qui est appelé nombre *triangulaire*, on peut le représenter avec T_n pions « en triangle » :



En juxtaposant deux triangles identiques, l'un avec des pions noirs et l'autre avec des blancs, on obtient des rectangles :

- le rectangle formé avec $2\times\mathrm{T}_n$ pions est formé de n lignes et $n+1$ colonnes (1 avec que des pions noirs et n qui commencent par un pion blanc) ;
- le rectangle contient donc $n(n+1)$ pions ;
- ainsi, $2\times\mathrm{T}_n = n(n+1)$.



Propriété

La **somme** des premiers termes d'une suite **arithmétique** est égale à :

$$\text{nombre de termes}\times\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}.$$

Autrement dit,

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}.$$

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\cdots+(u_0+nr)\\
&= (u_0+\cdots+u_0)+r(1+2+\cdots+n)\\
&= (n+1)u_0+r\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= (n+1)\left(u_0+\frac{rn}{2}\right)\\
&= (n+1)\left(\frac{u_0+u_0+rn}{2}\right)\\
&= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}
\end{aligned}$$

II. Suites géométriques

II.1. Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** q, appelé ici aussi **raison** de la suite.
Autrement dit, une suite est **géométrique** si sa formule de récurrence est du type :

$$u_{n+1}=u_n\times q \quad \text{pour tout } n\geqslant 0.$$

Exemple

La suite des puissances de dix : $1-10-100-1000-10000-\ldots$ est géométrique de raison 10.

Remarque

Une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en divisant toujours par le même nombre est également géométrique, puisque diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est géométrique :

- soit on transcrit le texte de l'énoncé sous forme de formule de récurrence ;
- soit on calcule le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ entre deux termes consécutifs et on montre que ce quotient est constant et ne dépend pas de n.
  Le résultat de ce calcul est alors la **raison** q de la suite.

Exemple

On souhaite démontrer que la suite définie par $u_n=5\times 3^n$ pour tout $n\geqslant 0$ est géométrique.

- on calcule u_{n+1} : $u_{n+1}=5\times 3^{n+1}=5\times 3^n\times 3$;
- puis le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times 3^n\times 3}{5\times 3^n}=3$.

Le résultat ne dépend plus de n, donc la suite est **géométrique** de raison $q=3$.

II.2. Formule explicite

Propriété

Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0.
Alors on a :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque

Si le premier terme de la suite n'est pas u_0 mais u_1, on a la propriété :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

et, pour n'importe quel rang p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \text{pour tout } n \geqslant p.$$

Démonstration

$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q = u_0 \times q^2$
$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$
$\vdots$
$u_n = u_{n-1} \times q = u_0 \times q^{n-1} \times q = u_0 \times q^n$.

Exemple

Je place en banque une somme de 350 €. Au 1er janvier de chaque année, je perçois sur mon compte des intérêts qui s'élèvent à 3 % de la somme placée pendant l'année écoulée. Quelle somme sera disponible sur mon compte au bout de 5 ans ?

- Au bout d'un an, il y aura $350 + \dfrac{3}{100} \times 350 = 350 + 10{,}5 = 360{,}5$ €.
- Au bout de deux ans, il y aura $306{,}5 + \dfrac{3}{100} \times 360{,}5 = 360{,}5 + 10{,}815 \approx 371{,}31$ €.
- La suite (c_n) où c_n est la somme placée à la fin de la n-ième année est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $c_0 = 350$.
  En effet, $c_{n+1} = c_n + \dfrac{3}{100} \times c_n = c_n + 0{,}03c_n = 1{,}03c_n$.
- Au bout de 5 ans, il y aura donc sur le compte $c_5 = c_0 \times q^5 = 350 \times 1{,}03^5 \approx 405{,}75$ €.

II.3. Sens de variation

Propriété

Une suite **géométrique** n'est pas toujours monotone. Soit q un réel :

- La suite (q^n) est **croissante** si $q > 1$.
- La suite (q^n) est **décroissante** si $0 < q < 1$.
- La suite (q^n) est **non monotone** si $q < 0$.

Démonstration

On a $q^{n+1} - q^n = q^n \times q - q^n = q^n(q-1)$.
Le signe de ce produit dépend donc du signe de q et de $q-1$.

II.4. Modélisation

Propriété

Les suites **géométriques** modélisent des évolutions successives à **taux constant**. On parle également dans ce cas d'**évolution exponentielle**.

Remarque

On utilisera notamment une suite géométrique pour modéliser toute augmentation ou diminution d'un **pourcentage** constant. En effet, une quantité qui augmente de t % est multipliée par $\text{CM} = 1 + \dfrac{t}{100}$.

II.5. Somme des premiers termes

Théorème

Pour tout $q \neq 1$ et tout entier naturel n non nul,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

On a :
$(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n)(1 - q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \cdots + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$ donc on obtient le résultat voulu en divisant les deux membres par $1 - q$ qui est non nul.

Propriété

La **somme** des premiers termes d'une suite **géométrique** est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Autrement dit,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

On a :
$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + (u_0 \times q) + (u_0 \times q^2) + \cdots + (u_0 \times q^n) = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$.

Exercice

Une puce se déplace sur le dos d'un âne. Son premier saut a une longueur de 40 mm. À cause de la fatigue, chacun de ses sauts a une longueur égale à la moitié de la longueur du saut précédent.
On note $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des longueurs des sauts de cette puce.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. Combien mesure le huitième saut de la puce ?
3. Quelle est la distance totale parcourue par la puce au bout des 8 premiers sauts ?

DOC 26

CH09 - Suites arithmétiques, géométriques - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 6$.
   a. Donner la formule de récurrence liée à la suite (u_n).
   b. Déterminer la formule explicite donnant u_n en fonction de n.
   c. En déduire les valeurs de u_7 et de u_{50}.
   d. Déterminer, en justifiant, le sens de variations de la suite (u_n).
   e. Calculer la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de 1er terme $v_1 = 1000$ et de raison $q = 1{,}05$.
   a. Donner la formule de récurrence liée à la suite (v_n).
   b. Déterminer la formule explicite donnant v_n en fonction de n.
   c. En déduire, arrondies au millième, les valeurs de v_7 et de v_{20}.
   d. Déterminer, en justifiant, le sens de variations de la suite (v_n).
   e. Calculer, arrondie au millième, la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_{13}$.

Exercice 2

1. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 50 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
   b. Déterminer la formule explicite donnant u_n en fonction de n.
   c. Déterminer, en justifiant, le sens de variations de la suite (u_n).
   d. Déterminer, par calculs, le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n < 0$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = 0{,}88 v_n \text{ pour tout entier } n \end{cases}$.
   a. Déterminer la nature de la suite (v_n).
   b. Déterminer la formule explicite donnant v_n en fonction de n.
   c. Déterminer, en justifiant, le sens de variations de la suite (v_n).
   d. Déterminer, en détaillant la méthode, le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n \leqslant 45$.

Exercice 3

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 10$ et $u_5 = 46$.
   a. Déterminer, en justifiant, la raison r de (u_n).
   b. En déduire la valeur de u_{30}.
2. Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_5 = 4$ et $v_7 = 6{,}25$.
   a. Déterminer, en justifiant, une valeur possible pour la raison q de (v_n).
   b. En déduire la valeur de v_{11}.

Exercice 4

1. En Janvier 2020, on met de côté la somme de 10 € puis les mois suivants, on met de côté 2 € de plus que le mois précédent. On note s_n la somme (en euros) mise de côté le n-ième mois. En particulier, on a $s_1 = 10$.
   - **a.** Déterminer les valeurs de s_2 et de s_3. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
   - **b.** Déterminer, en justifiant, la nature de la suite (s_n).
   - **c.** En déduire une expression de s_n en fonction de n.
   - **d.** Déterminer la somme mise de côté en Décembre 2020, ainsi que la somme totale mise de côté en 2020.
2. Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde. On note b_n le nombre de bactéries à l'instant n.
   - **a.** Préciser la valeur de b_0 puis calculer le nombre de bactéries au bout de 1 seconde puis de 2 secondes.
   - **b.** Déterminer, en justifiant, la nature de la suite (b_n).
   - **c.** En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   - **d.** Déterminer le nombre de bactérie au bout d'une minute.
   - **e.** Déterminer, en détaillant, au bout de combien de temps le nombre de bactérie dépassera 500.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18$.

1. - **a.** Calculer u_1 et u_2.
   - **b.** Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 90$.
   - **a.** Calculer v_0, v_1 et v_2.
   - **b.** Pour tout entier n, exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n.
   - **c.** Justifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}8v_n$ puis en déduire la nature de la suite (v_n).
   - **d.** Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire que $u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n$ pour tout entier n.
4. - **a.** Déterminer la valeur de u_{10}.
   - **b.** Déterminer, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).
   - **c.** Déterminer, en détaillant, le plus petit entier n pour lequel $u_n \geqslant 85$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
   - **a.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.
   - **b.** En déduire la nature de la suite (v_n) puis en déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que $u_n = n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. - **a.** Montrer que $u_{n+1} - u_n = (1-2n)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   - **b.** En déduire le sens de variation de (u_n).
5. Déterminer, en détaillant, le plus petit entier n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-6}$.

Compléments d'algorithmique

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 500$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 20$. En ALGO python, on va :

- calculer un terme quelconque
- déterminer un seuil
- calculer une somme de termes

Algorithme - Recherche d'un terme

Code Python

```python
def terme_un(n):
    u = 500                     # 1er terme de la suite
    for i in range(1,n+1) :     # i va de 1 à n
        u = 0.95 * u + 20       # formule de récurrence de (un)
    return u                    # on renvoie le terme d'indice n
```

Début de la console python

```
>>> # calcul de u_7
>>> terme_un(7)
469.8337296093749
```

Fin de la console python

Algorithme - Recherche d'un rang (algorithme de seuil)

Code Python

```python
def seuil_un(S) :
    n = 0                       # rang initial
    u = 500                     # 1er terme de la suite
    while u >= S :              # condition de sortie (ici u<S)
        u = 0.95 * u + 20       # le terme suivant via la formule de récurrence
        n = n + 1               # le rang suivant
    return n,u                  # on renvoie le rang (et le terme)
```

Début de la console python

```
>>> # plus entier n tel que u_n < 450
>>> seuil_un(450)
(14, 448.76749791155277)
```

Fin de la console python

Algorithme - Recherche d'une somme

Code Python

```python
def somme_termes_un(n) :
    u = 500                     # le 1er terme vaut 500
    s = 500                     # la somme aussi
    for i in range(2,n+1) :     # i va de 2 à n
        u = 0.95 * u + 20       # formule de récurrence de (un)
        s = s + u               # on augmente la somme partielle de u
    return s                    # on affiche la somme complète
```

Début de la console python

```
>>> # calcul de u_1 + u_2 + ... u_50
>>> somme_termes_un(50)
21846.110049446557
```

Fin de la console python

Logiciel

Sur SHELL `https://python.cpierquet.fr/?from=examples/2m2_algos_suites.py` les scripts précédents peuvent être testés !

DOC 27

CH09 - Suites arithmétiques, géométriques - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. **a.** On a directement le fait que $u_{n+1} = u_n + r = u_n + 6$ pour tout entier n.
   b. Ainsi on a $u_n = u_0 + nr = 5 + 6n$ pour tout entier n.
   c. De ce fait, $u_7 = u_0 + 7r = 5 + 6 \times 7 = 47$ et $u_{50} = u_0 + 50r = 5 + 6 \times 50 = 305$.
   d. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6 > 0$, elle est donc monotone croissante.
   e. On a $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = 21 \times \dfrac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \dfrac{5 + (5 + 6 \times 20)}{2} = 21 \times \dfrac{130}{2} = 1\,365$.
2. **a.** On a directement le fait que $v_{n+1} = v_n \times q = 1{,}05 v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   b. Ainsi on a $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1\,000 \times 1{,}05^{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   c. De ce fait, $v_7 = v_1 \times q^6 = 1\,000 \times 1{,}05^6 \approx 1\,340{,}096$ et $v_{20} = v_1 \times q^{19} = 1\,000 \times 1{,}05^{19} \approx 2\,526{,}950$ au millième.
   d. (v_n) est géométrique de raison $q > 1$ et de 1er terme $v_1 = 1\,000 > 0$, elle est donc monotone croissante.
   e. On a $v_1 + v_2 + \ldots + v_{13} = v_1 \times \dfrac{1 - q^{13}}{1 - q} = 1\,000 \times \dfrac{1 - 1{,}05^{13}}{1 - 1{,}05} \approx 17\,712{,}983$ au millième.

Exercice 2

1. **a.** La suite (u_n) est arithmétique (« on ajoute toujours -3 ») de raison $r = -3$ et de 1er terme $u_1 = 50$.
   b. On a ainsi $u_n = u_1 + (n-1)r = 50 - 3(n-1) = 50 - 3n + 3 = 53 - 3n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   c. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -3 < 0$, elle est donc monotone décroissante.
   d. On cherche n tel que $u_n < 0 \Leftrightarrow 53 - 3n < 0 \Leftrightarrow 3n > 53 \Leftrightarrow n > \dfrac{53}{3} \approx 17{,}67 \Rightarrow n \geqslant 18$.
2. **a.** (v_n) est géométrique (« on multiplie toujours par 0,88 ») de raison $q = 0{,}88$ et de 1er terme $v_0 = 100$.
   b. On a ainsi $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0{,}88^n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   c. (v_n) est géom. de raison $q \in]0\,;1[$ et de 1er terme $v_0 = 100 > 0$, elle est donc monotone décroissante.
   d. En tabulant, $\left.\begin{cases} v_6 \approx 46{,}44 \\ v_7 \approx 40{,}87 \end{cases}\right| \Rightarrow n \geqslant 7$.

Exercice 3

1. **a.** (u_n) étant arithmétique, on a $u_5 = u_2 + 3r \Leftrightarrow 46 = 10 + 3r \Leftrightarrow 36 = 3r \Leftrightarrow r = 12$.
   b. On a, de ce fait, $u_{30} = u_2 + 28r = 10 + 28 \times 12 = 346$.
2. **a.** (v_n) étant géométrique, on a $v_7 = v_5 \times q^2 \Leftrightarrow 6{,}25 = 4 \times q^2 \Leftrightarrow q^2 = \dfrac{6{,}25}{4} = 1{,}5625 \Rightarrow q = \pm\sqrt{1{,}5625} = \pm 1{,}25$.
   b. On a, de ce fait, $v_{11} = v_5 \times q^6 = 4 \times (\pm 1{,}25)^6 \approx 15{,}26$ au centième.

Exercice 4

1. Chaque mois, on augmente la somme de 2 €.
   a. On a, de ce fait, $s_2 = 10 + 2 = 12$ (12 € de côté en Février 2020) et $s_3 = 12 + 2 = 14$ (14 € en Mars 2020).
   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = s_n + 2$, donc (s_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $s_1 = 10$.
   c. On a ainsi $s_n = s_1 + (n-1)r = 10 + 2(n-1) = 10 + 2n - 2 = 8 + 2n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   d. La somme mise de côté en Décembre 2020 est donnée par $s_{12} = 8 + 2 \times 12 = 32$ soit 32 €.
   La somme totale mise de côté en 2020 est $S = s_1 + \ldots + s_{12} = 12 \times \dfrac{s_1 + s_{12}}{2} = 12 \times \dfrac{10 + 32}{2} = 252$ soit 252 €.

2. Chaque seconde, on augmente le nombre de bactéries de 25 %, donc on multiplie par CM $= 1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$.

a. On a $b_0 = 5$. Puis $b_1 = 5 \times 1{,}25 = 6{,}25$ (au bout de 1 s) et $b_2 = 6{,}25 \times 1{,}25 = 7{,}8125$ (au bout de 2 s).

b. Pour tout entier n, $b_{n+1} = b_n \times 1{,}25$, donc (b_n) est géométrique de raison $q = 1{,}25$ et de 1er terme $b_0 = 5$.

c. On a ainsi $b_n = b_0 \times q^n = 5 \times 1{,}25^n$ pour tout n.

d. Au bout d'une minute, on calcule $b_{60} = 5 \times 1{,}25^{60} \approx 3\,262\,652$ soit 3 262 652 bactéries !

e. En tabulant, $\left.\begin{cases} b_{20} \approx 433{,}68 \\ b_{21} \approx 542{,}10 \end{cases}\right| \Rightarrow n \geqslant 21$, donc il y aura plus de 500 bactéries au bout de 21 secondes.

Exercice 5

1. **a.** On a $u_1 = 0{,}8 \times u_0 + 18 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 70$ et $u_2 = 0{,}8 \times u_1 + 18 = 0{,}8 \times 70 + 18 = 74$.

b. • $\begin{cases} u_1 - u_0 = 70 - 65 = 5 \\ u_2 - u_1 = 74 - 70 = 4 \end{cases}$, la suite (u_n) ne peut donc pas être arithmétique ;

• $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{70}{65} \approx 1{,}077 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{74}{70} \approx 1{,}057 \end{cases}$, la suite (u_n) ne peut donc pas être géométrique.

2. **a.** On a $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$, $v_1 = u_1 - 90 = 70 - 90 = -20$ et $v_2 = u_2 - 90 = 74 - 90 = -16$.

b. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = (0{,}8u_n + 18) - 90 = 0{,}8u_n - 72$ pour tout entier n.

c. Et, $v_{n+1} = 0{,}8\left(u_n - \frac{72}{0{,}8}\right) = 0{,}8(u_n - 90) = 0{,}8v_n$ pour tout n.

On en déduit donc que (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de 1er terme $v_0 = -25$.

d. On a ainsi $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0{,}8^n$ pour tout n.

3. Sachant que $v_n = u_n - 90$ pour tout n, on a $u_n = v_n + 90 = -25 \times 0{,}8^n + 90$ pour tout n.

4. **a.** On a ainsi $u_{10} = -25 \times 0{,}8^{10} + 90 \approx 87{,}32$ au centième.

b. En utilisant la formule explicite $u_n = -25 \times 0{,}8^n + 90$ pour tout n :

$\left.\begin{cases} \text{la « partie » } 0{,}8^n \text{ est monotone décroissante car } 0 < 0{,}8 < 1 \\ \text{la « partie » } -25\times \text{ est négative} \\ \text{la « partie » } +90 \text{ ne change rien} \end{cases}\right| \Rightarrow$ la suite (u_n) est monotone croissante.

c. En tabulant, $\left.\begin{cases} u_7 \approx 84{,}73 \\ u_8 \approx 85{,}81 \end{cases}\right| \Rightarrow n \geqslant 8$.

Exercice 6

1. En étant attentif à la concordance des indices :

$u_2 = \frac{1+1}{3\times 1} \times u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ puis $u_3 = \frac{2+1}{3\times 2} \times u_2 = \frac{3}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ puis $u_4 = \frac{3+1}{3\times 3} \times u_3 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$.

2. **a.** On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\cancel{n+1}}{3\cancel{n}} u_n \times \frac{1}{\cancel{n+1}} = \frac{u_n}{3n} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{3} \times v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de 1er terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$.

On en déduit donc que $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. Ainsi, de $v_n = \frac{u_n}{n}$, on déduit que $u_n = n \times v_n = n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. **a.** On a $u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times [n+1-3\times n] = (1-2n)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. On a $(1-2n) < 0$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$, donc par produit, $u_{n+1} - u_n < 0$, donc (u_n) est monotone décroissante.

5. En tabulant, $\left.\begin{cases} u_{15} \approx 1{,}04 \times 10^{-6} \\ u_{16} \approx 3{,}71 \times 10^{-17} \end{cases}\right| \Rightarrow n \geqslant 16$.

DOC 28

CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire

I. Rappels sur les vecteurs

I.1. Vecteurs et coordonnées

Définition

Un **vecteur** $\vec{u}$ matérialise un **déplacement**, en décrivant sa **direction**, son **sens** et sa longueur, appelée **norme** (et notée $\|\vec{u}\|$).
On le représente à l'aide d'une flèche qui peut se placer *n'importe où dans le plan.*

Propriétés

- Pour additionner deux vecteurs, on les place bout à bout ou on ajoute leurs coordonnées.
- Multiplier un vecteur par un nombre k revient à multiplier sa longueur par k (et changer son sens si le nombre est négatif), et à multiplier ses coordonnées par k.
- Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ (extrémité - origine).
- Dans un repère orthonormé, $\|\vec{u}\|=\sqrt{(\text{abscisse de }\vec{u})^2+(\text{ordonnée de }\vec{u})^2}$.
- Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C ; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

I.2. Vecteurs et colinéarité

Définition

La **colinéarité** est aux vecteurs ce que le **parallélisme** est aux droites.

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si on peut exprimer l'un en fonction de l'autre, autrement dit si il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow xy'-yx'=0$
- Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre.

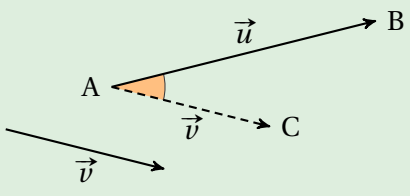
II. Produit scalaire

II.1. Définition

Définition

Le **produit scalaire** est une opération entre **deux vecteurs** et dont le résultat est un **nombre réel**.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ si l'un des deux vecteurs est nul
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ sinon.



Point histoire

Le produit scalaire est à l'origine une notion physique : le produit linéaire. Cet outil fut élaboré par le physicien prussien *Hermann Grassman* (1809–1877) et le physicien américain Josiah Gibbs (1839–1903). Mais c'est le mathématicien irlandais *William Hamilton* (1805–1865, présenté en médaillon) qui en donna une première définition mathématique en 1853.

Exemples

- ABC est un triangle équilatéral de côté 5. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
- ABCD est un carré de côté 1. Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$

Remarque

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, le produit scalaire est positif, mais si l'angle est obtus, le produit scalaire est négatif (il suffit de voir le signe du cosinus dans le cercle trigo !).

II.2. Cas des vecteurs colinéaires

Propriété

- Si deux vecteurs sont **colinéaires de même sens**, leur produit scalaire est **positif** et est égal au produit de leurs normes.
- Si deux vecteurs sont **colinéaires de sens contraire**, leur produit scalaire est **négatif** : c'est l'opposé du produit de leurs normes.

Remarque

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$. On parle de **carré scalaire** ; et $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

II.3. Cas des vecteurs orthogonaux

Définition

L'**orthogonalité** est aux vecteurs ce que la **perpendicularité** est aux droites. Autrement dit :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux si les droites qui les supportent sont perpendiculaires, ou si l'un des vecteurs est nul (par convention). On note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Propriété

Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors leur produit scalaire est nul.

Démonstration

En effet, si l'angle entre les deux vecteurs est droit, alors sa mesure est $\pm\dfrac{\pi}{2}$, et donc son cosinus est nul ! ☑

III. Expressions du produit scalaire

III.1. Expression géométrique

Propriété

Comme on l'a vu dans la définition, $\vec{u}\cdot\vec{v} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

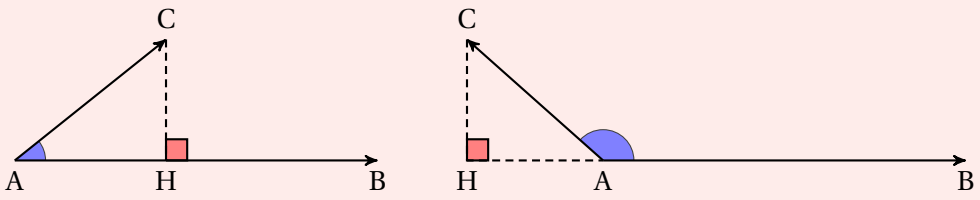
Remarque

On peut donc réutiliser le chapitre précédent pour tout ce qui concerne les valeurs remarquables et les propriétés du cos.

III.2. Projection orthogonale

Propriété

Soient trois points distincts A, B et C.
Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.



▶ L'avantage étant que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, donc de produit scalaire facile à calculer.

Démonstration

Dans le cas d'un angle aigu, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \dfrac{AH}{AC} = AB \times AH$.

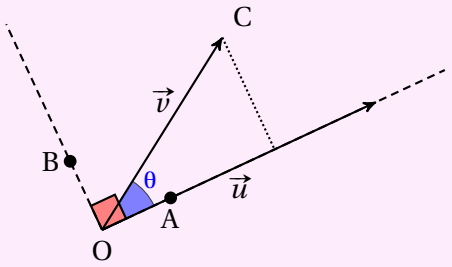
III.3. Expression analytique

Théorème

Si le plan est muni d'un repère orthonormal et que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ y ont pour coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, d'angle θ, O un point du plan.
A le point défini par $\overrightarrow{OA} = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et B tel que le triangle OAB soit isocèle rectangle en O.
Alors OA = OB = 1 et le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ est orthonormal.



Dans ce repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}||\vec{u}||\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}||\vec{v}||\cos(\theta)\\||\vec{v}||\sin(\theta)\end{pmatrix}$, donc si on calcule $xx' + yy'$ on obtient :
$xx' + yy' = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta) + 0 \times ||\vec{v}||\sin(\theta) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta) = \vec{u}\cdot\vec{v}$.
On admet que ce résultat ne dépend pas du repère choisi.

Conséquence

La norme (ou longueur) du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

En effet, d'une part $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$ et d'autre part $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2$.

IV. Propriétés du produit scalaire

IV.1. Condition d'orthogonalité

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Démonstration

- Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul et les vecteurs sont orthogonaux par convention.
- Sinon, notons A, B et C trois points *distincts* tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
  Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, alors $AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) = 0$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ car les points étant distincts, les distances ne peuvent pas être nulles.
  Or les seuls angles à avoir un cosinus nul sont ceux dont le point-image sur le cercle trigonométrique est sur l'axe des ordonnées, autrement dit $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, qui sont des angles de 90°.
  Ainsi, la réciproque de la propriété vue ci-dessus est vraie : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. ☑

IV.2. Symétrie et bilinéarité

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, et k un nombre réel. Alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$;
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times\vec{u}\cdot\vec{v} = (k\vec{u})\cdot\vec{v}$.

Démonstration

La première propriété est immédiate avec la définition. Les deux autres se prouvent facilement en utilisant la formule avec les coordonnées. ☑

Conséquence

On développe les produits scalaires de la même façon que les produits de réels, et en particulier, on a les identités remarquables :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

Démonstration

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$. ☑

IV.3. Normes et produit scalaire

Propriétés

Grâce aux identités remarquables, on peut donner encore une nouvelle façon de calculer un produit scalaire…
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$.

Démonstration

On a vu ci-dessus $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
Il suffit alors d'isoler $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans cette égalité.

Même chose avec l'autre identité remarquable pour la deuxième expression. ☑

IV.4. Décomposition de vecteurs

Méthode : Décomposition de vecteurs

On a vu qu'il était facile de calculer le produit scalaire de vecteurs colinéaires ou orthogonaux. Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques dont on ne connaît pas les coordonnées, on peut décomposer un (ou même les deux) vecteur(s) en somme de vecteurs suivant des directions perpendiculaires. En développant avec les règles habituelles, les produits scalaires qui interviennent seront soit nuls (vecteurs orthogonaux) soit des produits de longueurs (vecteurs colinéaires).

Exemple

On peut retrouver l'expression analytique du produit scalaire en décomposant les vecteurs sur la base $(\vec{i},\vec{j})$.
En effet, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.
Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\cdot(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}) = xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + x'y\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$.
$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ étant orthogonaux, $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$.
Les deux autres produits scalaires sont des produits scalaires de vecteurs colinéaires, donc il suffit de multiplier les longueurs : $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = ||\vec{\imath}||^2 = 1$ puisque le vecteur est unitaire. Même chose pour $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$.
Il reste donc bien $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Exercice

Dans le carré ABCD, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AD].
Calculer $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CJ}$ en décomposant les vecteurs. Que peut-on en conclure ?

DOC 29

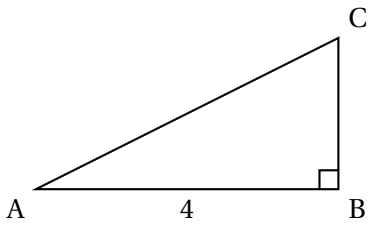
CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

1. Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec comme données AB = 4 ; AC = 3 et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
2. Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec les données suivantes :



3. Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ puis $\vec{u}^2$ puis $\vec{v}^2$ avec comme données $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

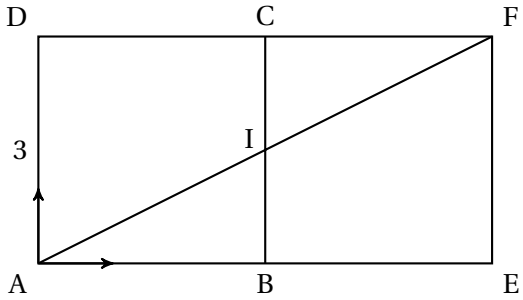
Exercice 2

On se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? orthogonaux ? Justifier.
2. On considère les points A (1 ; 3), B (−2 ; 7) et C (9 ; 9).
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 3

Les côtés des carrés accolés ABCD et BEFC ont pour longueur 3. I est l'intersection des segments [AF] et [BC].



1. a. Calculer la longueur AF puis en déduire une valeur de $\cos\left(\widehat{EAF}\right)$.
   b. En déduire une valeur de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI}$.
2. En utilisant la formule du produit scalaire avec la projection orthogonale, retrouver le résultat $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI}$.
3. On se place dans le repère orthonormal $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AI}$.
   b. Retrouver la valeur de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI}$.

Exercice 4

Déterminer les éventuelles valeurs du réel x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x-1\\4\end{pmatrix}$;
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$;
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on va utiliser algo python pour étudier l'éventuelle orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on connaît les coordonnées `xu`, `yu`, `xv` et `yv`.

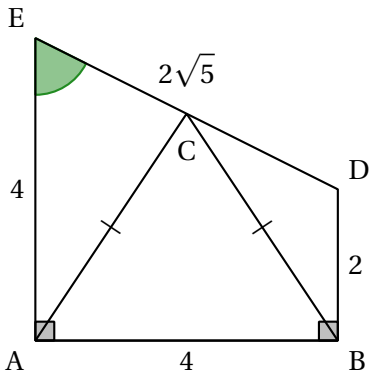
Code Python

```
1  def produitscalaire(xu,yu,xv,yv) :
2      res = ..............
3      return res
4
5  def orthogonaux(xu,yu,xv,yv):
6      ps = produitscalaire(xu,yu,xv,yv)
7      if ps .......... :
8          return True
9      else :
10         return False
```

1. Compléter la ligne L2 de sorte que `res` contienne la valeur $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. Compléter la ligne L7 de sorte que l'appel à la fonction `orthogonaux` renvoie `True` lorsque $\vec{u}\perp\vec{v}$ et `False` sinon.
3. Que renvoie :
   a. `produitscalaire(-1,5,4,3)` ?
   b. `orthogonaux(2,2.5,12.5,-10)` ?

Exercice 6

Le triangle isocèle ABC est inscrit dans un trapèze rectangle ABDE. Les longueurs sont données en centimètre.



1. a. Calculer, à l'aide d'une projection judicieuse, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$.
   b. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré, de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED})$.
   c. En déduire une valeur approchée, au dixième de degré, de la mesure de l'angle $\widehat{AED}$.
2. a. Calculer $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}$.
   b. Grâce à la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$, déterminer une valeur approchée, au dixième de centimètre, de la longueur AC.

DOC 30

CH10 - Calcul vectoriel, produit scalaire - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. D'après la « formule géométrique » du produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4\times 3\times\cos\left(60°\right) = 12\times 0{,}5 = 6.$
2. D'après la « formule projection » du produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = +AB\times AH = AB\times AB = 4\times 4 = 16.$
3. On a, par propriétés « analytiques » du produit scalaire :
   - $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times 3+(-1)\times 5 = 12-5 = 7$;
   - $\vec{u}^2 = 4^2+(-1)^2 = 16+1 = 17$;
   - $\vec{v}^2 = 3^2+5^2 = 9+25 = 34.$

Exercice 2

1. - en utilisant le déterminant : $xy'-yx' = 1\times 3-2\times(-6) = 3+12 = 15\neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
   - en utilisant le produit scalaire : $xx'+yy' = 1\times(-6)+2\times 3 = -6+6 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\7-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9-1\\9-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$.
   b. Par coordonnées, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3\times 8+4\times 6 = -24+24 = 0.$
   c. On peut en déduire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, et donc que ABC est rectangle en A.

Exercice 3

1. **a.** D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AEF en E :
   $AF^2 = AE^2+EF^2 = 6^2+3^2 = 36+9 = 45 \Rightarrow AF = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$
   De plus, dans le triangle rectangle AEF en E :
   $\cos\left(\widehat{EAF}\right) = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{6}{\sqrt{45}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$
   b. Ainsi, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI} = AE\times AI\times\cos\left(\widehat{EAF}\right) = 6\times\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 18.$
2. Par « projection orthogonale », $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI} = +AE\times AH = AE\times AB = 6\times 3 = 18.$
3. **a.** Dans le repère proposé, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}3\\1{,}5\end{pmatrix}$.
   b. Ainsi $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI} = 6\times 3+0\times 1{,}5 = 18.$

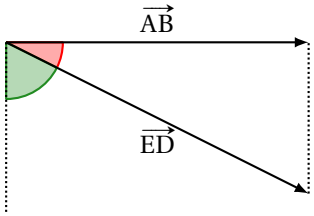
Exercice 4

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ssi $6\times(-3)+x\times 2 = 0 \Leftrightarrow -18+2x = 0 \Leftrightarrow x = 9$;
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x-1\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ssi $-3(x-1)+x\times 4 = 0 = 0 \Leftrightarrow -3x+3+4x = 0 \Leftrightarrow x = -3$;
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ssi $3x-16 = 0 \Leftrightarrow x = {}^{16}/_{3}$;

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\8\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ssi $x\times x+2\times 8=0\Leftrightarrow x^2+16=0$ qui est impossible.

Exercice 5

1. **a.** On « déplace » $\overrightarrow{ED}$ en le faisant partir de A, et en « projetant » D, on tombe sur B.



Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}=+AB\times AB=4\times 4=16$.

b. En utilisant la « formule géométrique » :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}=AB\times ED\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}\right)\Rightarrow 16=4\times 2\sqrt{5}\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}\right)\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}\right)=\dfrac{16}{8\sqrt{5}}$.
La calculatrice nous donne $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}\right)\approx 26{,}6°$.

c. Ainsi une valeur approchée, au dixième de degré, de la mesure de l'angle $\widehat{AED}$ est de $90-26{,}6$ soit $63{,}4°$.

2. **a.** En utilisant la « formule géométrique » :
$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}=EA\times EC\times\cos\left(\widehat{AEC}\right)=4\times\sqrt{5}\times\cos\left(63{,}4°\right)=4$.

b. On utilise la formule avec $\vec{u}=\overrightarrow{EA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{EC}$: $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}=4\\ ||\vec{u}||^2=EA^2=16\\ ||\vec{v}||^2=EC^2=5\\ ||\vec{u}-\vec{v}||^2=||\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EC}||^2=||\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CE}||^2=||\overrightarrow{CA}||^2=CA^2\end{cases}$.

Et donc $4=\frac{1}{2}\left(16+5-AC^2\right)\Rightarrow 21-AC^2=8\Rightarrow AC^2=13\Rightarrow AC=\sqrt{13}\approx 3{,}6$ cm.

Exercice 6

1. La ligne L2 peut contenir `res = xu*xv + yu*yv`.

2. La ligne L7 peut contenir `if ps == 0 :`.

Code Python

```
1  def produitscalaire(xu,yu,xv,yv) :
2      res = xu*xv + yu*yv
3      return res
4
5  def orthogonaux(xu,yu,xv,yv):
6      ps = produitscalaire(xu,yu,xv,yv)
7      if ps == 0 :
8          return True
9      else :
10         return False
```

3. **a.** `produitscalaire(-1,5,4,3)` renvoie `11` car : $(-1)\times 4+5\times 3=-4+15=11$.

b. `orthogonaux(2,2.5,12.5,-10)` renvoie `True` car : $2\times 12{,}5+2{,}5\times(10)=25-25=0$.

Début de la console python

```
>>> produitscalaire(-1,5,4,3)
11
>>> orthogonaux(2,2.5,12.5,-10)
True
```

Fin de la console python

DOC 31

CH11 - Applications de la dérivation

I. Lien entre dérivée et tangente

I.1. Rappels

Rappels

Le **nombre dérivé** $f'(a)$ d'une fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Une fonction affine est croissante si et seulement si son coefficient directeur est positif.

La tangente en A à une courbe est la droite qui s'approche le mieux de la courbe au voisinage de A.

I.2. Théorème fondamental

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

- la fonction f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est positive sur I ;
- la fonction f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est négative sur I ;
- la fonction f est constante sur I $\Leftrightarrow$ sa dérivée f' est nulle sur I tout entier.

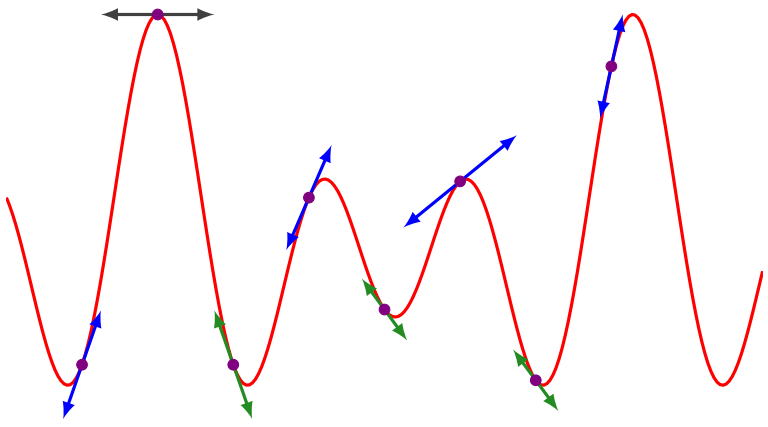
Remarque

Ce théorème s'énonce aussi au sens strict (strictement croissante avec strictement positive, …)

Démonstration

On a vu que le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente au voisinage du point d'abscisse a. Comme cette tangente est la droite qui s'approche le mieux de la courbe, la courbe et la tangente on le même sens de variation au voisinage de a. Et comme le signe du coefficient directeur d'une droite donne les variations de celle-ci, le signe de $f'(a)$ donne le sens de variation de f au voisinage de a. ☑

Illustration



On peut donc constater que :

- les « tangentes bleues montent » et que la courbe « suit la même direction » ;
- les « tangentes vertes descendent » et que la courbe « suit la même direction » ;
- la « tangente grise est horizontale » et que la courbe « change de direction ».

La tangente et la courbe vont donc dans la « même direction » !

I.3. Une méthode très importante

Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction :

- on **calcule sa fonction dérivée** f' en utilisant la formule adéquate ;
- on **étudie le signe de cette dérivée** (en général en faisant un **tableau de signes**) ;
- on **conclut** grâce au théorème ci-dessus ;
- on calcule les extremums de la fonction (ce qui est au « bout des flèches »), en calculant les images des nombres qui sont dans la première ligne, quand on peut.

Remarques

Cette méthode fait donc appels à plusieurs chapitres et notions étudiées précédemment :

- dérivation globale pour calculer la dérivée d'une fonction ;
- équations, inéquations, et tableaux de signes pour le signe de la dérivée ;
- calculatrice pour les images et la courbe.

Exemple

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

- La fonction f est sous la forme d'une somme, donc on la dérive terme à terme :
  $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12$.
- La dérivée est un polynôme du second degré, donc on sait étudier son signe ; on calcule Δ, les racines, et on regarde le signe de $a = 6$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[1 ; +\infty[$ et décroissante sinon.
- Il reste à calculer les extremums de la fonction : $f(-2) = 2 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) + 5 = 25$ et $f(1) = -2$.
  On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	25	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Attention à ne pas se tromper d'expression quand on remplace : c'est une ligne qui concerne f donc on remplace dans $f(x)$ et pas dans f'.

Exercice

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en utilisant la méthode décrite précédemment.
Vérifier en traçant la courbe de cette fonction sur la calculatrice.

II. Optimisation

II.1. Définition

Définitions

Une fonction f admet un **minimum** sur un intervalle I si l'une de ses images est plus petite que toutes les autres :

$$f \text{ admet un minimum sur I} \Leftrightarrow \text{il existe } x_0 \in \text{I tel que } f(x) \geqslant f(x_0) \text{ pour tout } x \in \text{I}.$$

Il y a une définition équivalente pour un **maximum**.

On appelle **extremum** une valeur extrême, c'est-à-dire un minimum ou un maximum.

II.2. Propriété

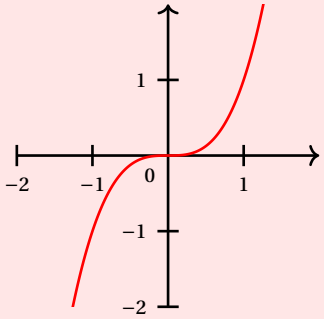
Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum en x_0, alors f' s'annule pour $x = x_0$.

Attention

La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que la dérivée s'annule que la fonction admet un extremum !
Par exemple voyons ce qui se passe avec la fonction cube $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



En 0, la dérivée s'annule mais la fonction ne change pas de variation car la dérivée ne change pas de signe.
Cela signifie que la courbe va présenter un « plat » au niveau de 0 mais restera toujours strictement croissante !

Méthode

Les problèmes dits d'**optimisation** sont les problèmes qui consistent à chercher le minimum ou le maximum d'une fonction. Ce sont des préoccupations quotidiennes ! (limiter les coûts, les besoins en matériaux, maximiser les bénéfices, les rendements, …)
Dès qu'on cherche à optimiser (minimiser ou maximiser) une fonction, il faut en fait chercher les variations de cette fonction, avec la méthode donnée plus haut.

Point histoire

La construction de la notion de **dérivation** (et ses applications) n'a pas été un long fleuve tranquille. L'Europe de la fin du XXII^{e} siècle a été le théâtre d'un affrontement scientifique entre deux écoles de pensée, d'un côté le monde anglais véhicule les « fluxions » de Newton tandis que le reste de l'Europe porte la pensée de Leibniz.
Voici comment, dans son ouvrage (1687), Newton exprime sa vision des dérivées :
« Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut. »

Tiré du BARBAZO de 1ère, 2019

DOC 32

CH11 - Applications de la dérivation - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

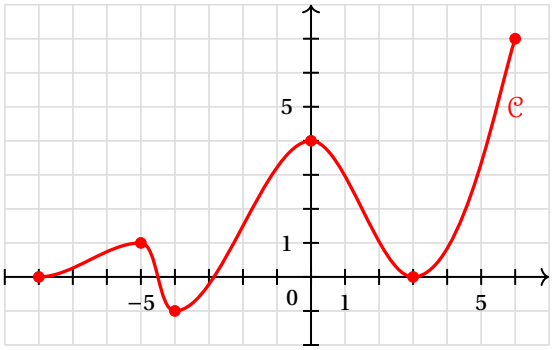
Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$. Le tableau suivant donne le signe de $g'(x)$ sur I.

x	0		3		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1. Sachant que $g(3) = -1$ et $g(6) = 2$, dresser le tableau de variations de g.
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction g.

Exercice 2

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction k définie et dérivable sur $[-8;6]$.



1. Quel est le maximum local de k sur $[-8;-4]$?
2. Quel est le minimum local de k sur $[-8;0]$?
3. Quel est le maximum de k sur $[-8;6]$?
4. Quel est le minimum de k au voisinage de 3 ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 13}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Justifier que h est définie sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que, pour tout réel x, on a $h'(x) = \dfrac{-4x^2 + 16x - 12}{(x^2 - 4x + 5)^2}$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.

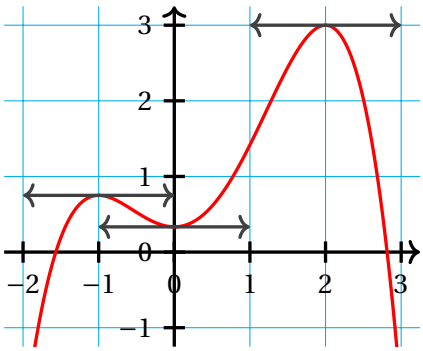
Exercice 5

On considère la fonction f définie (et dérivable) sur I = [1 ; 6] par $f(x) = 2x - 10 + \dfrac{8}{x}$.

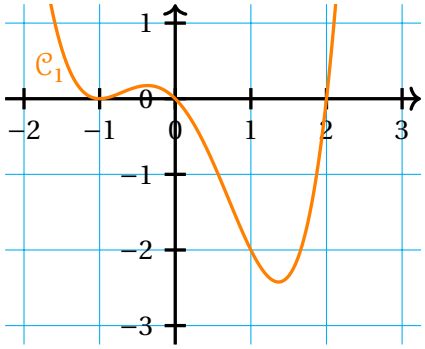
1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de f sur I.
3. En déduire l'existence d'un minimum pour f sur I. Préciser sa valeur et la valeur de x pour lequel il est atteint.
4. On donne $f(4) = 0$. Déterminer le tableau de signes de $f(x)$ sur I.
5. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de $f(x) = -1$.

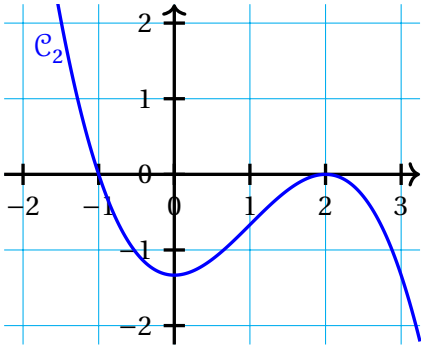
Exercice 6

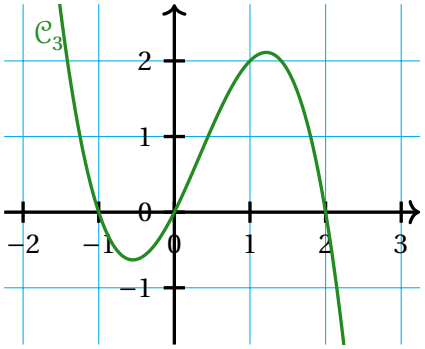
On donne ci-dessous le courbe représentative d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé.



1. Déterminer le tableau de variations de f puis en déduire le tableau de signes de $f'(x)$.
2. L'une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'. Laquelle ?







Exercice 7

Soit f la fonction définie et (deux fois) dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ (dérivée de f').
2. **a.** Étudier le signe de $f''(x)$.
   b. En déduire le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Calculer $f'(1)$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser finalement le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

DOC 33

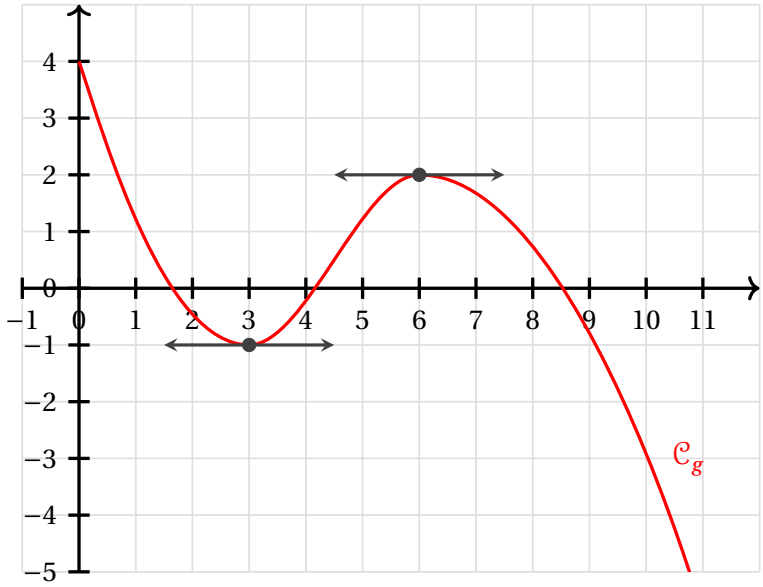
CH11 - Applications de la dérivation - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. On utilise le théorème fondamental pour passer du tds de $g'(x)$ au tdv de g :

x	0		3		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$g(0)$	↘	-1	↗	2	↘	

2. On peut proposer la courbe $\mathcal{C}_g$ suivante (on a choisi $g(0)=4$) :



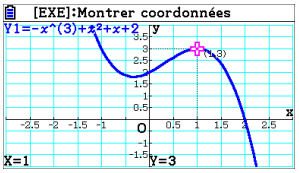
Exercice 2

1. Le maximum local de k sur $[-8;-4]$ est 1, atteint en $x=-5$.
2. Le minimum local de k sur $[-8;0]$ est -1, atteint en $x=-4$.
3. Le maximum de k sur $[-8;6]$ est 7, atteint en $x=6$.
4. Le minimum de k au voisinage de 3 est 0, atteint en $x=3$.

Exercice 3

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $f'(x)=-3x^2+2x+1$.
2. $f'(x)$ est un trinôme :
   - $\Delta=16$ et les deux racines sont $x_1=1$ et $x_2=-\frac{1}{3}$;
   - $a=-3$ donc le signe est $\ominus\oplus\ominus$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$\frac{49}{27}$	↗	3	↘	



Avec $f(1)=3$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{49}{27}$.

Exercice 4

1. Le dénominateur de $h(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: c'est un trinôme avec $\Delta = -4 < 0$, donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

De plus, comme fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par quotient :

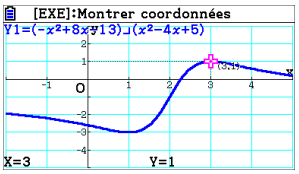
$$h'(x) = \frac{(-2x+8)\times(x^2-4x+5) - (2x-4)\times(-x^2+8x+13)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{-2x^3+8x^2-10x+8x^2-32x+40-(-2x^3+16x^2+26x+4x^2-32x-52)}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{-4x^2+16x-12}{(x^2-4x+5)^2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2. On étudie le signe de $h'(x)$, qui s'exprime comme un quotient :

- $-4x^2+16x-12$ est un trinôme : $\Delta = 64$ et les deux racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ avec $a = -4 < 0$;
- $(x^2-4x+5)^2$ est le carré d'un trinôme ne s'annulant jamais, il est donc toujours strictement positif.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-4x^2+16x-12$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2-4x+5)^2$		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h		$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	



Avec $h(1) = -3$ et $h(3) = 1$.

Exercice 5

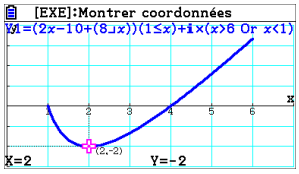
1. La fonction f est dérivable sur $[1;6]$ (somme de fonctions dérivables).

Et on a $f'(x) = 2 - 0 + 8\times\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2x^2-8}{x^2}$ pour tout réel $x \in [1;6]$.

2. On étudie le signe de $f'(x)$, qui s'exprime comme un quotient :

- $2x^2-8$ est un trinôme : $\Delta = 64$ et les deux racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$ avec $a = 2 > 0$;
- x^2 est toujours strictement positif sur $[1;6]$.

x	1		2		4		6
$2x^2-8$		$-$	0	$+$			
x^2		$+$		$+$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$



Avec $f(1) = 0$; $f(2) = -2$ et $f(6) = \frac{10}{3}$.

3. On peut en déduire que f admet un minimum sur I, qui vaut -2 et qui est atteint en $x = 2$.

4. Les différentes données du tdv de f permettent de déduire le tds de $f(x)$ (on « descend les 0 » …) :

x	1		4		6
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

5. On arrive à « placer » -1 sur les 2 flèches du tdv de f, c'est donc que l'équation $f(x)=1$ admet 2 solutions.

x	1		α		2		β		6
f	0	↘	-1	↘	-2	↗	-1	↗	$\frac{10}{3}$

Exercice 6

1. On lit graphiquement le tdv de f pour en déduire le tds de $f'(x)$ (grâce au thm fondamental) :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
f		↗	a	↘	b	↗	3	↘	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Parmi les 3 courbes proposées, la seule compatible (au niveau du signe $\oplus\ominus\oplus\ominus$) est $\mathcal{C}_3$.

Exercice 7

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $f'(x)=3\times4x^3-4\times3x^2+6\times2x-12=12x^3-12x^2+12x-12$ pour tout x.
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $f''(x)=12\times3x^2-12\times2x+12=36x^2-24x+12$ pour tout x.

2. **a.** $f''(x)$ est un trinôme : $\Delta=-1\,152$, pas de racine réelle, et $a=36>0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	

b. On en déduit (thm fondamental) de tdv de f' :

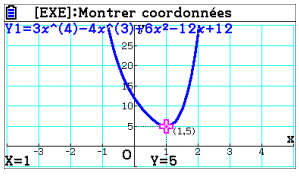
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		
f'		↗	0	↗	

3. **a.** On a $f'(1)=0$ ce qui permet de déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ (« on descend les 0 » ...) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b. On peut finalement dresser finalement le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (thm fondamental) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	5	↗	



DOC 34

CH12 - Variables aléatoires

Cadre

Dans toute la leçon qui suit, on considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est un ensemble fini.

I. Variable aléatoire

I.1. Définition

Définition

Une **variable aléatoire** réelle X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
C'est-à-dire qu'à chaque issue de l'expérience aléatoire, on va associer un nombre réel.

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

- si la carte tirée est le 7 de cœur, on marque 18 points ;
- si c'est un as, on marque 5 points ;
- si c'est une tête (roi, dame ou valet), on marque 2 points ;
- on ne marque pas de point sinon.

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les cartes du jeu qu'il est possible de tirer :
$\Omega = \{A\clubsuit ; R\clubsuit ; \dots ; 7\clubsuit ; A\diamondsuit ; R\diamondsuit ; \dots ; 7\diamondsuit ; A\heartsuit ; R\heartsuit ; \dots ; 7\heartsuit ; A\spadesuit ; R\spadesuit ; \dots ; 7\spadesuit\}$.

Si on appelle X la **variable aléatoire** égale au **nombre de points marqués**, X va associer à chaque carte un nombre de points : $X(A\spadesuit) = 5 \quad X(7\heartsuit) = 18 \quad X(9\spadesuit) = 0 \quad \dots$

L'**univers image** de X est l'ensemble des valeurs prises par X, on le note $X(\Omega)$.
Ici, il s'agit des scores possibles : $X(\Omega) = \{18 ; 5 ; 2 ; 0\}$.
L'**événement** $\{X = 5\}$ est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire qui ont pour image 5.
Ici, ce sont toutes les cartes qui permettent de remporter 5 points : $\{X = 5\} = \{A\clubsuit ; A\diamondsuit ; A\heartsuit ; A\spadesuit\}$.

La **probabilité** que X soit égale à 5, notée $p(X = 5)$, est donc la probabilité d'obtenir un as : $p(X = 5) = \dfrac{4}{32} = 0{,}125$.

Exercice

Dans l'exemple ci-dessus :

1. Décrire $\{X = 18\}$ puis déterminer sa probabilité.
2. Calculer $p(X = 2)$ et $p(X = 0)$.
3. Décrire $\{X < 4\}$ puis déterminer sa probabilité.

Remarque

L'avantage d'une variable aléatoire est que l'on peut rendre « numérique » une expérience de probabilités qui ne l'est au départ pas du tout ! Et du coup des « calculs » vont pouvoir être effectués !

Notation

Une variable aléatoire se note toujours avec une lettre majuscule. On réserve souvent celles du début de l'alphabet aux *événements*, et celles de la fin aux *variables aléatoires*.

I.2. Loi de probabilité

Définition

On appelle **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X la donnée d'un **tableau** dans lequel figurent :
- en première ligne, la liste des **valeurs possibles** x_i pour X ;
- en deuxième ligne, les **probabilités** $p(X = x_i)$ correspondantes.

On la présente en général sous la forme :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Exemple

La loi de probabilité de la variable X de l'exemple précédent est donc :

Nombre de points	18	5	2	0
Probabilité	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$

Propriété

Dans une loi de probabilité, la **somme des probabilités** (c'est-à-dire pour la seconde ligne du tableau) doit toujours être **égale à 1**.

Démonstration

En effet, le tableau doit lister 100% des cas ! ☑

Exemple

On peut en effet vérifier que $\frac{1}{32} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{15}{32} = 1$.

II. Paramètres d'une variable aléatoire

II.1. Espérance mathématique

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend les n valeurs x_1, x_2, …, x_n de probabilités respectives p_1, p_2, …, p_n, c'est-à-dire dont la loi de probabilité est :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X, et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre réel défini par :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n.$$

Remarques

- Si X a une unité (€, centimètre, ...) alors $\mathbb{E}(X)$ a la même unité.
- Il existe une notation qui permet d'éviter d'écrire cette formule avec des pointillés. On écrit aussi
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$
(Σ se lit « sigma ») et qui signifie « somme pour i variant de 1 jusqu'à n des termes de la forme $x_i p_i$ ».

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $\mathbb{E}(X) = 18 \times \frac{1}{32} + 5 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{15}{32} = \frac{31}{16} \approx 1{,}9$ points.

Propriété

L'**espérance** est la **moyenne** que l'on peut « espérer » si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Démonstration

En effet, le calcul de l'espérance en probabilités correspond à celui de la moyenne pondérée en statistiques :
$$\frac{p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n}{1} = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n.$$
☑

Définition

Lors d'un jeu d'argent, on appelle **gain algébrique** la différence entre la *somme gagnée* à la fin du jeu et la *somme misée* au début pour avoir le droit de jouer. Ce *gain* algébrique peut donc être *négatif*.

Exemple

Dans le cas de notre jeu, si on décide de faire miser 2 €, avant de laisser le passant tirer la carte, et qu'il gagne des euros au lieu de gagner des points : 18 €, pour le sept de cœur, 5 €, pour un as et 2 €, pour une tête, rien sinon. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur :

- s'il tire le 7 de cœur, il a misé 2 €, et en récupère 18, donc au final il a 16 € ; cela avec une probabilité de $\frac{1}{32}$;
- s'il tire un as, alors $Y = 5 - 2 = 3$;
- si c'est une tête, il récupère juste sa mise, donc il n'aura ni perdu ni gagné d'argent : $Y = 0$;
- s'il tire une autre carte, il aura définitivement perdu ses 2 €, donc $Y = -2$.

L'univers image de Y est $Y(\Omega) = \{16 ; 3 ; 0 ; -2\}$ et sa loi de probabilité :

Gain algébrique	16	3	0	-2
Probabilité	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$

Propriété

Si une variable aléatoire X correspond au *gain algébrique* dans un jeu d'argent, on dit que le jeu est **équitable** lorsque X a **une espérance nulle**.

Exercice

Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de la variable aléatoire Y de l'exemple précédent.
Le jeu est-il équitable ? Si non, à qui profite-t-il ?

Remarque

La plupart du temps, les jeux d'argent permettent à leurs organisateurs de faire du profit. Dans ce cas, l'espérance du gain algébrique sera *négative* puisque, en moyenne, les joueurs *perdront* de l'argent.

II.2. Variance et écart-type

Définitions

On considère toujours une variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On appelle **variance** de la variable aléatoire X, et on note $\mathbb{V}(X)$, le nombre réel **positif** :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = x_1^2 \times p_1 + x_2^2 \times p_2 + \cdots + x_n^2 \times p_n - \mathbb{E}(X)^2 .$$

On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$, la racine carrée de sa variance : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exemple

Reprenons la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie plus haut, dont on a déjà calculé l'espérance qui est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{31}{16}$:

Nombre de points	18	5	2	0
Probabilité	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$

$$\mathbb{V}(X) = 18^2 \times \frac{1}{32} + 5^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 0^2 \times \frac{15}{32} - \left(\frac{31}{16}\right)^2 = \frac{2815}{256} \approx 11 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \approx \sqrt{11} \approx 3{,}3 \text{ points}$$

Remarques

- avec la notation Σ comme ci-dessus, on a :
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mathbb{E}(X)^2$$
- on a aussi la formule suivante, qui est équivalente :
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2$$
- Si X a une unité (€, centimètre, ...) alors $\sigma(X)$ a la même unité, mais pas la variance.

Propriété

L'**écart-type** est une caractéristique de **dispersion** « espérée » pour la loi de probabilité de la variable aléatoire.

Exercice

Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire Y égale au gain algébrique. Que remarque-t-on ?

Remarque

En raison de la mise au carré des écarts, l'unité de la variance est le *carré* de celle du caractère , d'où l'impossibilité d'additionner la *moyenne* et la *variance*. On a donc défini l'*écart type* qui, lui, le peut !

III. Simulation, modélisation

III.1. Simulation

Python

En ALGO python, on peut *simuler* une expérience aléatoire, pour déterminer – par *simulation* – une loi de probabilités possible pour une variable aléatoire.

Code Python

```
# somme de deux dés (résultats possibles := 2...12)
from random import randint
def simul(n) :
    tirage = [randint(1,6)+randint(1,6) for i in range(n)]
    result = [round(tirage.count(i)/n,3) for i in range(2,12)]
    return result
```

Début de la console python

```
>>> simul(1000)
[0.027, 0.057, 0.078, 0.125, 0.151, 0.166, 0.147, 0.09, 0.081, 0.054]
>>> simul(10000)
[0.026, 0.054, 0.086, 0.109, 0.141, 0.163, 0.138, 0.115, 0.082, 0.057]
```

Fin de la console python

III.2. Modélisation

Méthode

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer un univers et une loi de probabilité.
Deux approches sont possibles pour « choisir » ce modèle :

- avec un raisonnement *a priori* s'appuyant sur les hypothèses de l'énoncé : par exemple en listant l'ensemble des issues possibles avec un arbre ou une autre représentation puis en déterminant la valeur associée à chaque issue.
- avec une estimation *a posteriori* s'appuyant sur des fréquences observées par statistique ou simulation. La fréquence d'une issue tend vers sa probabilité quand le nombre d'expériences augmente. Ce résultat s'appelle la **Loi des grands nombres**, et fut énoncé pour la première fois par le mathématicien Jacques Bernoulli en 1713 (8 ans après sa mort).

Point histoire

Jacob Bernoulli (1654/1705, CH) est l'ainé de la famille des *Bernoulli*, famille de mathématiciens suisses d'origine belge. Ses parents, qui sont de riches commerçants, souhaitent qu'il étude la théologie et la philosophie, ce qu'il fait d'ailleurs puisqu'il obtint un diplôme dans ces deux disciplines, mais ses intérêts se portent rapidement vers l'astronomie et les mathématiques.

Il aimait particulièrement la spirale logarithmique, et ses propriétés d'invariance. Il demanda à ce que l'on en grave une sur sa tombe, accompagnée des mots « Eadem mutata resurgo », qui signifient « Elle renait changée en elle-même ». Hélas, le graveur, mauvais mathématicien, dessina une spirale d'Archimède !

DOC 35

CH12 - Variables aléatoires - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. Dans chaque cas déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de points :

1. On gagne 10 points si on tire une figure, 3 points si on tire un 10, et 1 point si on tire une autre carte.
2. On gagne 50 points si on tire l'as de trèfle, 25 points pour un autre as, 13 points si on tire le roi ou la dame de pique, 9 points pour les autres figures et on perd 37 points si on tire une autre carte.

Exercice 2

Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X. Si besoin arrondir à 10^{-2}.

1.

x_i	-5	0	7
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,3

2.

x_i	-4	-3	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Exercice 3

Une urne contient les jetons, indiscernables au toucher, représentés ci-dessous.

1. Soit X la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit dessus.

   Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On suppose maintenant que les jetons verts comptent double, les jetons rouges comptent pour moitié et les jetons bleus sont sans effet. Soit Y la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit sur celui-ci en tenant compte des modifications.

   Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 4

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit S la variable aléatoire qui associe à chaque lancer la somme des deux dés.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un tableau à double entrée.

	⚀	⚁	⚂	…
⚀	2			
⚁				
…				

2. Déterminer la loi de probabilité de S.
3. Calculer $\mathbb{E}(S)$. Interpréter le résultat.

Exercice 5

Dans un club d'aviron, les adhérents peuvent choisir une formule d'entraînements uniquement le weekend, ou bien une formule d'entraînements le weekend et la semaine. De plus, ils peuvent adhérer au club uniquement pour accéder à toutes les installations intérieures (rameurs, salle de musculation, etc) sans profiter des entraînements sur l'eau. Enfin, ils ont la possibilité de s'inscrire à des séances de fitness complémentaires.
La répartition des différents adhérents est donnée dans le tableau ci-dessous :

	Weekend uniquement	**Weekend et semaine**	**En salle**	**Total**
Fitness	20		70	
Pas fitness		190		350
Total	150			450

1. Compléter le tableau à double entrée.
2. Le prix à l'année pour la formule weekend uniquement est de 450 €, 505 € pour la formule weekend et semaine, et 400 € pour la formule en salle. De plus, l'inscription aux séances de fitness coûte 30 € par an.

   On note X le montant des frais d'inscription payés par un adhérent choisi au hasard dans ce club d'aviron.

   a. Déterminer les valeurs prises par X.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 6

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :
- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients ;
- 20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur constate :
- que parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- que parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :
- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{\text{C}}$ l'évènement contraire de C.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $\text{M} \cap \text{C}$ puis calculer $p(\text{M} \cap \text{C})$.
   b. Montrer que $p(\text{C}) = 0{,}76$.
3. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?
4. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €.

   Chaque client prend un seul plat au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   a. Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?
   b. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	…	…	…
Probas p_i	0,02	0,18	…			

   c. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire et interpréter ce résultat.

DOC 36

CH12 - Variables aléatoires - Exercices (Correction)

Exercice 1

1. La loi de probabilité de X est :

x_i	0	3	10
p_i	$16/32$	$4/32$	$12/32$

En effet, il y a 12 figures (X = 10), 4 cartes dix (X = 3) donc 16 cartes restantes (X = 0).

2. La loi de probabilité de Y est :

x_i	-37	9	13	25	50
p_i	$16/32$	$10/32$	$2/32$	$3/32$	$1/32$

En effet, il y 1 as de trèfle (X = 50), 3 autres as (X = 25), le roi et la dame de pique (X = 13), 10 autres figures (X = 9) et 16 autres cartes (X = −37).

Exercice 2

1. On a :
   - $\mathbb{E}(X) = -5 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}4 + 7 \times 0{,}3 = 0{,}6$;
   - $\mathbb{V}(X) = (-5)^2 \times 0{,}3 + 0^2 \times 0{,}4 + 7^2 \times 0{,}3 - 0{,}6^2 = 21{,}84$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{21{,}84} \approx 4{,}67$.
2. On a :
   - $\mathbb{E}(X) = -4 \times 0{,}2 + (-3) \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}1 = -0{,}4$;
   - $\mathbb{V}(X) = (-4)^2 \times 0{,}2 + (-3)^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}4 + 5^2 \times 0{,}1 - (-0{,}4)^2 = 9{,}84$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{9{,}84} \approx 3{,}14$.

Exercice 3

1. La loi de probabilité de X est :

x_i	1	2	4
p_i	$4/15$	$8/15$	$3/15$

En effet, il y quatre boules ① (X = 1), huit boules ② (X = 2) et trois boules ④ (X = 4).

2. La loi de probabilité de Y est :

y_i	1	2	4
p_i	$3/15$	$10/15$	$2/15$

En effet, il y a :
   - quatre boules ① vertes, trois boules ④ rouges et trois boules ② bleues (Y = 2) ;
   - trois boules ② rouges (Y = 1) ;

- deux boules ② vertes (Y = 4).

Exercice 4

1. On peut proposer le tableau suivant :

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

2. La loi de probabilité de S est :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

3. On a $\mathbb{E}(S) = 2 \times \dfrac{1}{36} + 3 \times \dfrac{2}{36} + \ldots + 11 \times \dfrac{2}{36} + 12 \times \dfrac{1}{36} = 7$.
Ainsi en lançant deux dés et en additionnant les faces, on obtient en moyenne 7.

Exercice 5

1. Le tableau complété est :

	Weekend uniquement	**Weekend et semaine**	**En salle**	**Total**
Fitness	20	10	70	100
Pas fitness	130	190	30	350
Total	150	200	100	450

2. **a.** Les valeurs prises par X sont :
- 400 : en salle sans fitness ;
- 430 : en salle avec fitness ;
- 450 : w-end sans fitness ;
- 480 : w-end avec fitness ;
- 505 : w-end semaine sans fitness ;
- 535 : w-end semaine avec fitness.

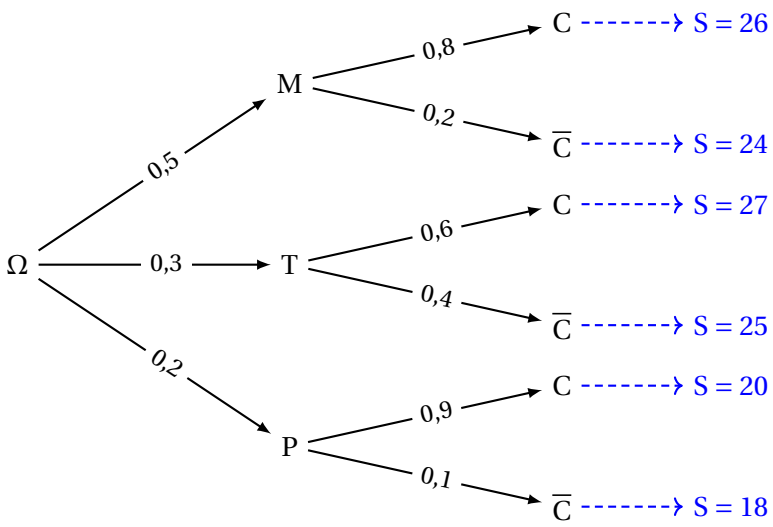
b. La loi de probabilité de X est :

x_i	400	430	450	480	505	535
p_i	$30/450$	$70/450$	$130/450$	$20/450$	$190/450$	$10/450$

3. On a $\mathbb{E}(X) = 400 \times \dfrac{30}{450} + \ldots + 535 \times \dfrac{10}{450} = 470$.
De ce fait, le prix moyen à l'année est de 470 €.

Exercice 6

1. L'arbre de probabilités est :



2. **a.** $M \cap C$ représente l'évènement « le client a pris un macaron **et** un café ».
Et on a $p(M \cap C) = p(M) \times p_M(C) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$.

b. D'après la formule des probabilités totales, on a $p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C)$.
Et donc $p(C) = 0,4 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,9 = 0,4 + 0,18 + 0,18 = 0,76$.

3. Il faut trouver $p_C(M) = \dfrac{p(C \cap M)}{p(C)} = \dfrac{0,4}{0,76} \approx 0,53$ à 0,01 près.

4. **a.** On a :

- P + M + C : 18 + 6 + 2 = 26 € ;
- P + M : 18 + 6 = 24 € ;
- P + T + C : 18 + 7 + 2 = 27 € ;
- P + T : 18 + 7 = 25 € ;
- P + C : 18 + 2 = 20 € ;
- P : 18 €

b. Le tableau complété est :

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

c. On a $18 \times 0,02 + 20 \times 0,18 + 24 \times 0,1 + 25 \times 0,12 + 26 \times 0,4 + 27 \times 0,18 = 24,62$ (€).
Sur un grand nombre de repas la recette par client s'élève à 24,62 €.

DOC 37

CH13 - Fonction exponentielle

I. Définitions

I.1. Fonction exponentielle

Définition

Il existe une et une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle **la fonction exponentielle**, et est notée exp.

Propriété

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée : $\exp' = \exp$.
La fonction exponentielle vaut 1 en 0 : $\exp(0) = 1$

Remarque

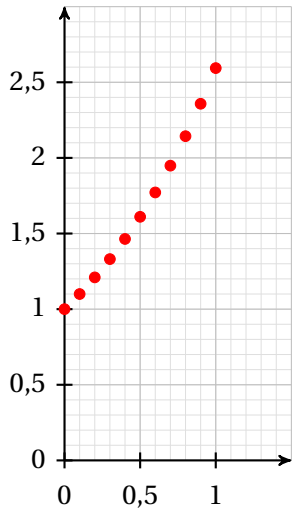
On peut utiliser la « méthode d'Euler » pour *étudier graphiquement* la fonction exp.

Illustration

	A	B	C
1	x	$f(x)$	$f'(x)$
2	0	1	1
3	0,1	1,1	1,1
4	0,2	1,21	1,21
5	0,3	1,331	1,331
6	0,4	1,464 1	1,464 1
7	0,5	1,610 51	1,610 51
8	0,6	1,771 561	1,771 561
9	0,7	1,948 717 1	1,948 717 1
10	0,8	2,143 588 81	2,143 588 81
11	0,9	2,357 947 691	2,357 947 691
12	1	2,593 742 46	2,593 742 46

=B2

=B2+0.1*C2



I.2. Le nombre e

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e : $\exp(1) = e$.
Avec la calculatrice, on peut trouver $e \approx 2{,}718281828$.

Point histoire

Comme π, le nombre e est un nombre **irrationnel**, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Le nombre e est également un nombre **transcendant**, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers (le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$, on dit qu'il est **algébrique**, par opposition à transcendant). Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse **Leonhard Euler** (1707-1783). C'est lui qui en a choisi le symbole et qui a démontré son irrationalité.

II. Étude de la fonction exponentielle

II.1. Signe

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0.$$

Remarque

C'est une propriété (fondamentale) à retenir pour la construction des tableaux de signes!

II.2. Tableau de variations

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa croissance est extrêmement rapide.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$		
exp	0	1	e	$+\infty$

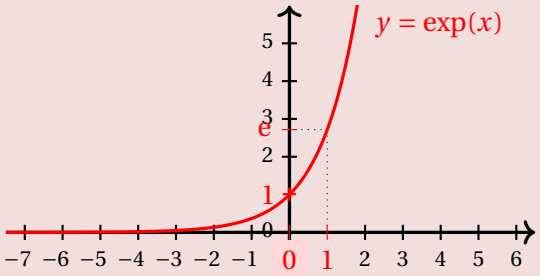
Démonstration

En effet, nous avons vu plus haut que $\exp'(x) = \exp(x)$ et que $\exp(x) > 0$ pour tout x.
Pour illustrer sa croissance très rapide, on peut dire par exemple, que $\exp(7)$ est supérieur à 1 000, $\exp(14)$ atteint déjà plus d'un million et $\exp(21)$ dépasse le milliard.

II.3. Courbe représentative

Théorème

Il faut connaître l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Remarque

Pour des grandes valeurs de x *négatives*, la courbe semble confondue avec l'axe des abscisses : ce n'est pas le cas, car les images sont *strictement* positives, mais la courbe est très très proche de l'axe. On dit que l'axe des abscisses est **asymptote** à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

Propriété

Une équation de $\mathcal{T}_0$, tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ est $y = x + 1$.
Ainsi, par approximation affine, on a $\exp(x) \approx x + 1$ pour x « petit ».

III. Propriétés algébriques

III.1. Relation fonctionnelle

Théorème

Pour tous réels x et y : $\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x + y)$.

Propriétés

Pour tous réels x et y : $\dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ et $\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x - y)$

Démonstration

La relation fonctionnelle est admise, et les deux autres propriétés en découlent. En effet :

$\exp(-x) \times \exp(x) = \exp((-x) + x) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;

$\exp(x - y) \times \exp(y) = \exp(x - y + y) = \exp(x)$ donc $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Exemples

- $\exp(1)\exp(3) = \exp(4)$
- $\exp(1 - x)\exp(1 + x) = \exp(2x)$
- $\dfrac{\exp(7x + 3)}{\exp(7x + 4)} = \exp(-1) = \dfrac{1}{\exp(1)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

III.2. Lien avec les suites géométriques

Propriété

Soit a un nombre réel quelconque.
La suite (u_n) définie par $u_n = \exp(na)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est **géométrique** de raison $\exp(a)$ et de premier terme 1.
Ainsi, $\exp(na) = \exp(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Pour montrer qu'une suite est géométrique, on calcule le quotient de deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\exp((n+1)a)}{\exp(na)} = \frac{\exp(na + a)}{\exp(na)} = \exp(na + a - na) = \exp(a)$$

Le quotient ne dépend plus de n, donc la suite est bien géométrique et la raison est $q = exp(a)$.
Le premier terme de la suite est $u_0 = \exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$.
Ainsi, la formule explicite est $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \exp(a)^n$ donc on a bien $\exp(na) = \exp(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3. Nouvelle notation

Intro

D'après la propriété précédente, avec $a = 1$, on trouve $\exp(n) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$ pour tout *n entier*.

Notation

Par *extension*, on note, pour tout x *réel* : $\exp(x) = e^x$.

Propriétés

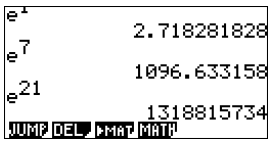
Avec la nouvelle notation, pour tous réels x et y :

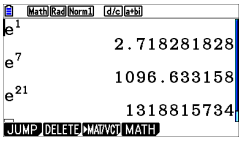
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$;
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$;
- $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$;
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

On retrouve exactement les formules des propriétés sur les puissances !
De plus, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculatrice

Bien évidemment, les calculatrices « connaissent » la fonction exponentielle, sous sa forme « puissance » !





IV. Compléments

IV.1. Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a pour tous réels a et b :

- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$;
- $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \leqslant b$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $3\mathrm{e}^{-4x+1} - 3\mathrm{e} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-4x+1} = \mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow -4x + 1 = 1 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\mathrm{e}^{3x+2} = e^{-4} \Leftrightarrow 3x + 2 = -4 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$.
- $\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^9 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $\mathrm{e}^{3x+1} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+1} > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$.
- $\mathrm{e}^{-2x+2} \geqslant \mathrm{e}^4 \Leftrightarrow -2x + 2 \geqslant 4 \Leftrightarrow -2x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -1$.
- $\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{-7x+9} < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} < -\mathrm{e}^{-7x+9} < 0$ qui est impossible.

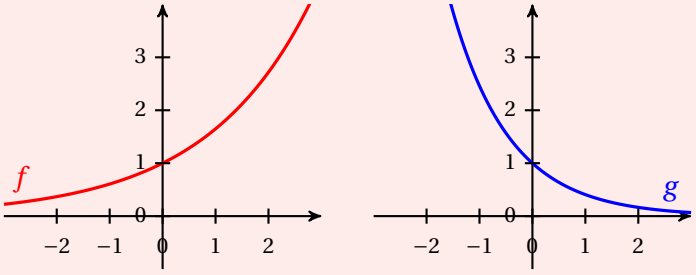
IV.2. Fonctions composées

Définition

Soit k un réel strictement positif. Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$ sont appelées de façon générale **fonctions exponentielles**.
Elles sont composées d'une fonction *linéaire* suivie de *la* fonction exponentielle.

Propriété

Soit k un nombre réel strictement positif, et f et g des fonctions exponentielles définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$, alors $f'(t) = k \times f(t) = k\mathrm{e}^{kt}$ et f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $g(t) = \mathrm{e}^{-kt}$, alors $g'(t) = -k \times g(t) = -k\mathrm{e}^{-kt}$ et g est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.



Démonstration

Les formules de dérivation sont admises, mais pour étudier les variations de la fonction, il suffit d'étudier le signe de la dérivée, sachant que $k > 0$, $\mathrm{e}^{kt} > 0$ et $\mathrm{e}^{-kt} > 0$ (toute image par une exponentielle est toujours strictement positive, même si l'antécédent est négatif).

Remarque

Il suffit, pour dériver ces fonctions, de les multiplier par le coefficient directeur de la fonction linéaire qui est à l'intérieur de l'exponentielle !

Propriété

On a les formules de dérivation composées suivantes :
- $\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$;
- si u est dérivable sur I, alors e^u l'est également, et $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

Remarque

On peut retenir ces formules en disant qu'on fait « sortir la dérivée » de ce qui se trouve dans l'exponentielle.

Exemples

On a, par exemple :
- $\left(\mathrm{e}^{5t}\right)' = 5\mathrm{e}^{5t}$;
- si $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x}$, alors $f'(x) = 4 \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} = 8\mathrm{e}^{2x}$;
- si $g(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{5x}$, alors $g'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{5x} + \left(5 \times \mathrm{e}^{5x}\right) \times (2x+3) = (2x+3) \times \left(2 + 5(2x+3)\right) = (10x+17)\mathrm{e}^{5x}$;
- si $h(x) = 10\mathrm{e}^{x^2-5x+4}$, alors $h'(x) = 10 \times \left((2x-5) \times \mathrm{e}^{x^2-5x+4}\right) = (20x-50)\mathrm{e}^{x^2-5x+4}$.

DOC 38

CH13 - Fonction exponentielle - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(e^3)^4 \times e^3}{e^4}$;
2. $e^{x+4} \times e^{4x}$;
3. $\dfrac{1}{e^{2-3x}}$;
4. $e \times \dfrac{3e^{5x}}{(e^{x+1})^3}$.

Exercice 2

1. Développer, et simplifier, les expressions suivantes :
   a. $e^x(e^x + x)$;
   b. $(1+e^x)(1-e^x)$;
   c. $(e^x + e^{-x})^2$;
   d. $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x)$.
2. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $\dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$;
   b. $\dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.
3. Factoriser l'expression : $e^{4x} + e^x$;
4. Mettre l'expression suivante au même dénominateur : $3e^x + \dfrac{2}{e^x + 3}$.

Exercice 3

1. Résoudre les équations suivantes :
   a. $e^x = e^{-2}$;
   b. $e^{2x+1} = 1$;
   c. $e^{-x} - 1 = 0$;
   d. $10e^{-x^2+2} + 50 = 0$;
   e. $(x-5)e^{3x} = 0$;
   f. $(x^2 + 2x + 1)(3e^{x+2} - 3) = 0$.
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $e^x \geqslant e^{-2}$;
   b. $e^{3x} < e$;
   c. $e^{-2x-1} \leqslant 1$;
   d. $e^{-2x+1} - e^{x-7} > 0$;
   e. $e^{x+4} \geqslant \dfrac{1}{e^{3x}}$;
   f. $(x-1)e^x > 0$.
3. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :
   a. $(3x-1)e^x$;
   b. $\dfrac{6x-12}{e^{3x+1}}$;
   c. $(-24x^2 + 20x - 4)e^{x-2}$;
   d. $\dfrac{e^x - 1}{(x+3)^2}$.

Exercice 4

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes (sans se soucier de l'ensemble de définition et de dérivabilité) :

1. $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$;
2. $g(x) = 10\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$;
3. $h(x) = \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-5x+4}$;
4. $i(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$;
5. $j(x) = 10\mathrm{e}^{-x} + 7\mathrm{e}^{2x}$;
6. $k(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$;
7. $l(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$;
8. $m(x) = (25x + 40)\mathrm{e}^{-0,2x}$;
9. $o(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice 5

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$.
   a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10\mathrm{e}^{-2x+6}$.
   a. Déterminer la dérivée g' de la fonction g.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$ puis en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x+3)\mathrm{e}^x$.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, on a $h'(x) = (2x+5)\mathrm{e}^x$.
   b. Étudier le signe de $h'(x)$.
   c. En déduire les variations de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = (-x+3,6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
2. a. Étudier le signe de $f'(x)$.
   b. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de $\mathcal{T}_0$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 7

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$\mathrm{R}(x) = (5x - 30)\mathrm{e}^{-0,25x}, \text{ pour tout réel } x \in [2\,;\,20].$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3. Résoudre l'inéquation $\mathrm{R}(x) \geqslant 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. On note R′ la dérivée de la fonction R. Un logiciel de calcul formel donne : $\mathrm{R}'(x) = (-1,25x + 12,5)\mathrm{e}^{-0,25x}$.
   a. Justifier le résultat donné par le logiciel.
   b. Étudier le signe de $\mathrm{R}'(x)$ puis en déduire les variations de R sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

DOC 39

CH13 - Fonction exponentielle - Exercices (Correction)

Exercice 1

On utilise les propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

1. $\dfrac{(e^3)^4 \times e^3}{e^4} = \dfrac{e^{4\times 3} \times e^3}{e^4} = \dfrac{e^{12} \times e^3}{e^4} = \dfrac{e^{15}}{e^4} = e^{15-4} = e^{11}$.
2. $e^{x+4} \times e^{4x} = e^{x+4+4x} = e^{5x+4}$.
3. $\dfrac{1}{e^{2-3x}} = e^{-(2-3x)} = e^{3x-2}$.
4. $e \times \dfrac{3e^{5x}}{(e^{x+1})^3} = e^1 \times \dfrac{3e^{5x}}{e^{3(x+1)}} = \dfrac{3e^{1+5x}}{e^{3x+3}} = 3e^{1+5x-(3x+3)} = 3e^{2x-2}$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x, on a :
   a. $e^x(e^x + x) = e^x \times e^x + e^x \times x = e^{2x} + xe^x$.
   b. $(1 + e^x)(1 - e^x) = 1 - e^x + e^x - e^x \times e^x = 1 - e^{2x}$.
   c. $(e^x + e^{-x})^2 = e^x \times e^x + 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-x} \times e^{-x} = e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.
   d. $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) = e^{-2x} \times e^{-2x} + e^{-2x} \times e^x - e^x \times e^{-2x} - e^x \times e^x = e^{-4x} + e^{-x} - e^{-x} - e^{2x} = e^{-4x} - e^{2x}$.
2. a. $\dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$ car $\begin{cases} (e^x - 1) \times 1 = e^x - 1 \\ e^x \times (1 - e^{-x}) = e^x - e^x \times e^{-x} = e^x - e^0 = e^x - 1 \end{cases}$ pour tout réel x.
   b. $\dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$ car $\begin{cases} 1 \times (e^{2x} - 1) = e^{2x} - 1 \\ (e^x + 1) \times (e^x - 1) = e^x \times e^x - e^x + e^x - 1 = e^{2x} - 1 \end{cases}$ pour tout réel x.
3. On a $e^{4x} + e^x = e^x \times e^{3x} + e^x = e^x \times (e^{3x} + 1)$ pour tout réel x.
4. On a $3e^x + \dfrac{2}{e^x + 3} = \dfrac{3e^x \times (e^x + 3) + 2}{e^x + 3} = \dfrac{3e^{2x} + 9e^x + 2}{e^x + 3}$ pour tout réel x.

Exercice 3

1. On utilise les techniques classiques de résolution des équations, en « rajoutant » la méthode « $e^{\cdots} = e^{\cdots}$ » :
   a. $e^x = e^{-2} \Leftrightarrow x = -2$.
   b. $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5$.
   c. $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   d. $10e^{-x^2+2} + 50 = 0 \Leftrightarrow 10e^{-x^2+2} = -50 \Leftrightarrow e^{-x^2+2} = -5$ ce qui est impossible !
   e. $(x - 5)e^{3x} = 0$ est une équation produit nul :
      - $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$;
      - $e^{3x} = 0$ qui est impossible.

      Ainsi $\mathcal{S} = \{5\}$.
   f. $(x^2 + 2x + 1)(3e^{x+2} - 3) = 0$ est une équation produit nul :
      - $x^2 + 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$ ce qui donne une racine, $x_0 = -1$;
      - $3e^{x+2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3e^{x+2} = 3 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

      Ainsi $\mathcal{S} = \{-2 ; -1\}$.

2. On utilise les techniques classiques de résolution des inéquations, en « rajoutant » la méthode « $e^{\cdots} < e^{\cdots}$ » :

a. $e^x \geqslant e^{-2} \Leftrightarrow x \geqslant -2$ ce qui donne $\mathcal{S} = [-2;+\infty[$.

b. $e^{3x} < e \Leftrightarrow e^{3x} < e^1 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ ce qui donne $\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$.

c. $e^{-2x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{-2x-1} \leqslant e^0 \Leftrightarrow -2x-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -0{,}5$ ce qui donne $\mathcal{S} = [-0{,}5;+\infty[$.

d. $e^{-2x+1} - e^{x-7} > 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} > e^{x-7} \Leftrightarrow -2x+1 > x-7 \Leftrightarrow -3x > -8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$ ce qui donne $\mathcal{S} = \left]\frac{8}{3};+\infty\right[$.

e. $e^{x+4} \geqslant \dfrac{1}{e^{3x}} \Leftrightarrow e^{x+4} \geqslant e^{-3x} \Leftrightarrow x+4 \geqslant -3x \Leftrightarrow 4x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \geqslant -1$ ce qui donne $\mathcal{S} = [-1;+\infty[$.

f. $(x-1)e^x > 0$ se présente bien sous la forme ZPQ pour lequel on cherche « les $\oplus$ sans les zéros » :

- $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $m = 1\oplus$;
- e^x est toujours strictement positif!

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathcal{S} =]1;+\infty[$.

3. Les expressions suivantes sont présentées sous forme Produit/Quotient, on peut donc se lancer dans les tableaux de signes :

a. $(3x-1)e^x$:

- $3x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ et $m = 3\oplus$;
- e^x est toujours strictement positif!

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$(3x-1)$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	

b. $\dfrac{6x-12}{e^{3x+1}}$:

- $6x-12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $m = 6\oplus$;
- e^{3x+1} est toujours strictement positif!

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(6x-12)$		$-$	0	$+$	
e^{3x+1}		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	

c. $(-24x^2+20x-4)e^{x-2}$:

- $-24x^2+20x-4 = 0$: $\Delta = 16$ ce qui donne deux racines, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$, avec de plus $a = -24\ominus$;
- e^{x-2} est toujours strictement positif!

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\left(-24x^2+20x-4\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{x-2}		$+$		$+$		$+$	
expr		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $\dfrac{e^x-1}{(x+3)^2}$:

- $e^x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$;
- $(x+3)^2$ est le carré d'un expression s'annulant en $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
expr		$-$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 4

1. $f(x)=e^x-x^2$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme une somme :

$f'(x)=e^x-2x$.

2. $g(x)=10e^x+\dfrac{1}{x}$ se dérive (sur $\mathbb{R}^*$) comme une somme :

$g'(x)=10\times e^x-\dfrac{1}{x^2}=10e^x-\dfrac{1}{x^2}$.

3. $h(x)=e^{3x}+e^{-5x+4}$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme une somme :

$h'(x)=3e^{3x}+\left(-5e^{-5x+4}\right)=3e^{3x}-5e^{-5x+4}$.

4. $i(x)=(x+3)e^x$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme un produit :

$i'(x)=1\times e^x+e^x\times(x+3)=e^x(1+x+3)=e^x(x+4)$.

5. $j(x)=10e^{-x}+7e^{2x}$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme une somme :

$j'(x)=10\times\left(-e^{-x}\right)+7\times\left(2e^{2x}\right)=-10e^{-x}+14e^{2x}$.

6. $k(x)=\dfrac{x}{e^x}$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme un quotient :

$k'(x)=\dfrac{1\times e^x-e^x\times x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$.

7. $l(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme un quotient :

$l'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x\left(e^x+1-\left(e^x-1\right)\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$.

8. $m(x)=(25x+40)e^{-0,2x}$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme un produit :

$m'(x)=25\times e^{-0,2x}+\left(-0,2\times e^{-0,2x}\right)\times(25x+40)=e^{-0,2x}\times\left(25-0,2(25x+40)\right)=(-5x+17)e^{-0,2x}$.

9. $o(x)=\left(x^2-3x+1\right)e^x$ se dérive (sur $\mathbb{R}$) comme un produit :

$o'(x)=(2x-3)e^x+e^x(x^2-3x+1)=e^x(2x-3+x^2-3x+1)=(x^2-x-2)e^x$.

Exercice 5

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x, on a $f'(x)=e^x$.

b. On a $f'(x)=e^x>0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $g'(x)=10\times\left(-2\times e^{-2x+6}\right)=-20e^{-2x+6}$.

b. On a $g'(x)=-20e^{-2x+6}<0$ sur $\mathbb{R}$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** La fonction h est dérivable (produit) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :
$h'(x) = 2 \times e^x + e^x \times (2x+3) = e^x \times (2 + 2x + 3) = (2x+5)e^x$.

b. On voit que $h'(x)$ se présente sous forme d'un produit :
- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$ avec $m = 2\oplus$;
- e^x est strictement positif!

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$(2x-5)$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

c. On peut donc en déduire les variations de h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$f(-2{,}5)$	↗	

Avec $f(-2{,}5) = (2 \times (-2{,}5) + 3)e^{-2{,}5} = -2e^{-2{,}5} \approx -0{,}164$ au millième.

Exercice 6

1. La fonction f est dérivable (produit) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :
$f'(x) = 5 \times e^{-0{,}2x} + \left(-0{,}2 \times e^{-0{,}2x}\right) \times (5x+7) = e^{-0{,}2x} \times \left(5 - 0{,}2(5x+7)\right) = (5 - x - 1{,}4)e^{-0{,}2x} = (-x + 3{,}6)e^{-0{,}2x}$

2. **a.** On voit que $f'(x)$ se présente sous forme d'un produit :
- $-x + 3{,}6 = 0 \Leftrightarrow x = 3{,}6$ avec $m = -1\ominus$;
- $e^{-0{,}2x}$ est strictement positif!

x	$-\infty$		$3{,}6$		$+\infty$
$(-x+3{,}6)$		$+$	0	$-$	
$e^{-0{,}2x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

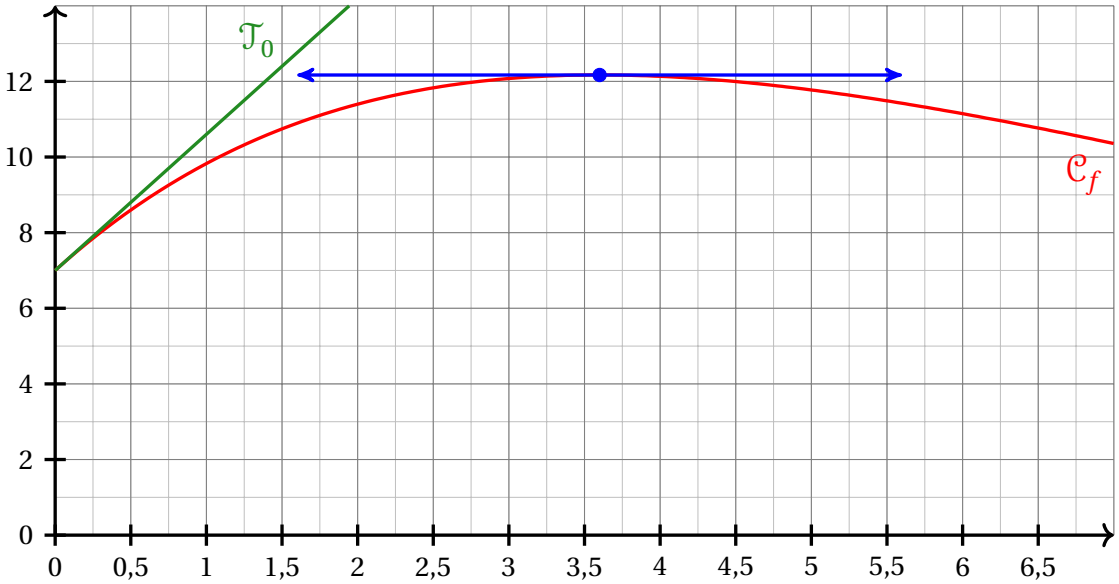
b. On peut donc en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$3{,}6$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$f(3{,}6)$	↘	

Avec $f(3{,}6) = (5 \times 3{,}6 + 7)e^{-0{,}2 \times 3{,}6} = 25e^{-0{,}72} \approx 12{,}169$ au millième.

3. Une équation de $\mathcal{T}_0$ est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$:
- $f(0) = (5 \times 0 + 7)e^{-0{,}2 \times 0} = 7e^0 = 7$;
- $f'(0) = (-0 + 3{,}6)e^{-0{,}2 \times 0} = 3{,}6e^0 = 3{,}6$.

Ainsi $\mathcal{T}_0 : y = 3{,}6 \times x + 7 = 3{,}6x + 7$.



Exercice 7

1. Le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit est donné par $R(7)$ dizaine de milliers d'euros. Or $R(7) = (5 \times 7 - 30)e^{-0,25\times 7} = 5e^{-1,75} \approx 0,86887$, donc le résultat est d'environ 8 689 €.

2. Pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, on calcule $R(4) = (5\times 4-30)e^{-0,25\times 4} = -10e^{-1} \approx -3,6790$, qui est négatif et donc qui correspond bien à un déficit.

3. On a, sachant qu'une exponentielle est strictement positive :

$R(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (5x-30)e^{-0,25x} \Leftrightarrow 5x-30 \geqslant 0 \Leftrightarrow 5x \geqslant 30 \Leftrightarrow x \geqslant 6$.

Dans le contexte de l'exercice, on obtient le fait que l'entreprise réalise un bénéfice à partir de 600 (6×100) litres de produit.

4. **a.** La fonction R est dérivable (produit) sur $[2;20]$ et, pour tout réel $x \in [2;20]$, on a :

$$R'(x) = 5 \times e^{-0,25x} + \left(-0,25 \times e^{-0,25x}\right) \times (5x-30) = e^{-0,25x} \times \left(5 - 0,25(5x-30)\right) = (5 - 1,25x + 7,5)e^{-0,25x}$$
$$= (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}.$$

b. On voit que $R'(x)$ se présente sous forme d'un produit :

- $-1,25x + 12,5 = 0 \Leftrightarrow -1,25x = -12,5 \Leftrightarrow x = 10$ avec $m = -1,25 \ominus$;
- $e^{-0,25x}$ est strictement positif!

x	2		10		20
$(-1,25x + 12,5)$		+	0	−	
$e^{-0,25x}$		+	|	+	
$R'(x)$		+	0	−	
R	R(2)	↗	R(10)	↘	R(20)

Avec $R(2) \approx -12,1306$; $R(10) \approx 1,6416$ et $R(20) \approx 0,4716$ au dix-millième.

c. La quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal est de 1 000 (10×100).

DOC 40

CH14 - Compléments sur le produit scalaire

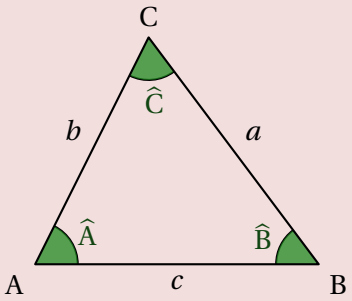
I. Applications du produit scalaire

I.1. Théorème d'Al-Kashi

Théorème

Dans un triangle ABC, on pose AB = c, AC = b et BC = a alors :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.



Point histoire

À Samarkand, le savant perse Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380–1430) vit sous la protection du prince Ulugh-Beg (1394–1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), al Kashi calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes : $2\pi \approx 6{,}283\,185\,307\,179\,586\,5$.

Démonstration n°1

On a, par exemple, $a^2 = BC^2$.
Et donc $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{A}\right) = bc\cos\left(\widehat{A}\right)$.
D'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$.

Démonstration n°2

On a, par exemple, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{A}\right) = bc\cos\left(\widehat{A}\right)$.
Et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$.
Ainsi $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\left(\widehat{A}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$.

Vocabulaire

« Résoudre un triangle », c'est déterminer tous les côtés et les angles du triangle.

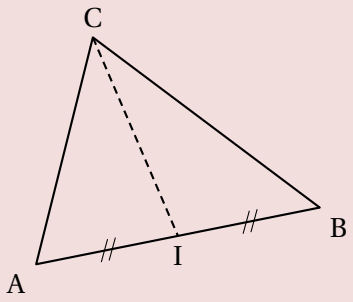
Remarque

Le théorème d'Al-Kashi est également nommé « théorème de Pythagore généralisé », car en effet le théorème de Pythagore est un cas particulier du théorème d'Al-Kashi avec un angle droit (de cos = 0).

I.2. Étude d'un ensemble de points

Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I est le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.



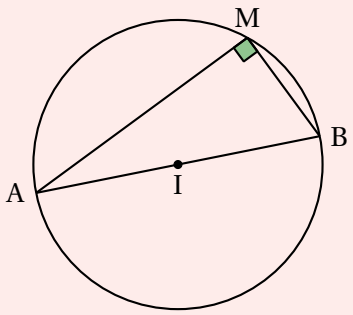
Démonstration

On a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{IA}\right) = CI^2 - IA^2 = CI^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = CI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

I.3. Caractérisation d'un cercle

Propriété

Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.



Démonstration

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB].
Le cercle de diamètre [AB], privé de A et de B, est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M, c'est à dire l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ avec $\overrightarrow{MA} \neq 0$ et $\overrightarrow{MB} \neq 0$.
De plus, si M = A ou si M = B, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Remarque

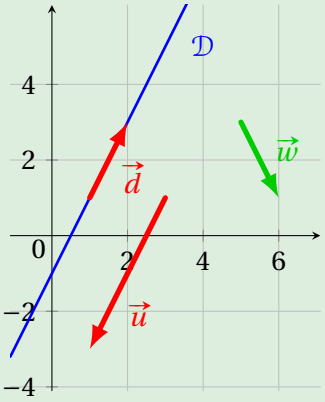
Au collège, cette propriété est connue comme celle d'un « triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un des côtés ». C'est également une conséquence de « l'angle au centre ».

II. Équation cartésienne de droites

II.1. Vecteur directeur

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Un vecteur non nul $\vec{d}$ est dit **directeur** de la droite $\mathcal{D}$ s'il a la même direction que la droite. Il peut être « sur » la droite, c'est-à-dire avec une origine et une extrémité qui sont des points de la droite, ou sur une droite parallèle. Ci-dessous, $\vec{d}$ et $\vec{u}$ dirigent $\mathcal{D}$ mais pas $\vec{w}$.



Remarque

Pour deux droites, on dit qu'elles sont *parallèles*, deux vecteurs seront dits plutôt *colinéaires*, dans le cas d'un vecteur et d'une droite, on dira que le vecteur *dirige* la droite ou en est un *vecteur directeur*.

Propriété

Si $\vec{d}$ dirige $\mathcal{D}$, alors tout vecteur non nul **colinéaire** à $\vec{d}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

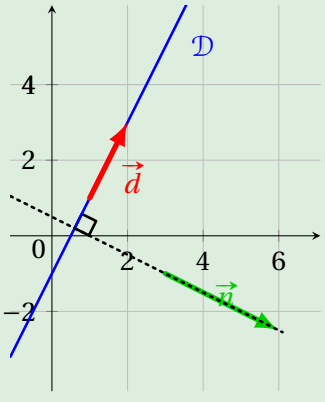
Propriété

Une droite de coefficient directeur m est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

II.2. Vecteur normal

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{d}$. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n}\cdot\vec{d}=0$. Ci-dessous, $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Sa direction est *perpendiculaire* à celle de $\mathcal{D}$.



Méthode

Pour définir la *direction* d'une droite, on peut soit en donner un vecteur directeur, soit un vecteur normal, suivant les situations.

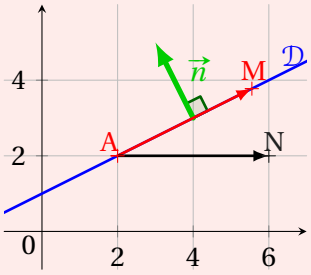
Propriétés

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, alors tout vecteur non nul **colinéaire** à $\vec{n}$ est également un vecteur normal de $\mathcal{D}$;
- Tout vecteur normal à $\mathcal{D}$ est **orthogonal** à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

II.3. Équation cartésienne de droite

Propriété

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Un point M du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Ici, M est sur la droite, mais N ne l'est pas car $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} \neq 0$.



Théorème

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls et où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur **normal** à la droite.

Exemple n°1

Soit $\mathcal{D}$ est la droite passant par A$(6\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc la droite $\mathcal{D}$ a une équation cartésienne de la forme $-1x + 2y + c = 0$.
Pour trouver la valeur de c, on utilise le point A$(6\,;4)$ qui est sur la droite et dont les coordonnées vérifient l'équation : $-1 \times 6 + 2 \times 4 + c = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$ et donc $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $-x + 2y - 2 = 0$.

Exemple n°2

- Soit $\mathcal{D}' : 5x - 3y + 8 = 0$.

On cherche un vecteur normal $\vec{m}$ en relevant les coefficients devant le x et le y dans l'équation : ici, $\vec{m}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
On cherche ensuite un point B de la droite en cherchant des coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation, par exemple ici B$(-1\,;1)$car $5 \times (-1) - 3 \times 1 + 8 = 0$ (on essaie si possible de trouver des coordonnées entières, mais sinon, on peut aussi choisir n'importe quelle valeur pour l'une des deux coordonnées et calculer la seconde !).

- $\Delta : 2x - 3 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (donc Δ est verticale) et passe par le point de coordonnées $(1{,}5\,;0)$.

Démonstration

Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A\,;\,y_A)$. Si $M(x\,;\,y)$ est un point quelconque,

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+(-ax_A-by_A)=0\end{aligned}$$

et on retrouve bien la forme annoncée en appelant c ce qui est dans la parenthèse.

Remarques - lien avec les équations réduites de droites, de la forme $y=mx+p$

- On connaissait déjà les **équations réduites** de droites. Mais les équations réduites ne sont valables que pour les droites *non verticales* (représentations de fonctions affines), tandis que *toutes* les droites ont une équation cartésienne, même les droites verticales.
- À partir d'une équation réduite, on obtient une équation cartésienne en passant tout dans le même membre pour avoir « $=0$ ».
- On peut retrouver l'équation réduite $y=mx+p$ d'une droite à partir de l'équation cartésienne en isolant le y d'un côté de l'égalité !
  Mais ceci n'est toutefois possible que s'il y a y dans l'équation de la droite, autrement dit si $b\neq 0$.
- Une droite est verticale si et seulement si il n'y a pas de y dans ses équations cartésiennes (donc si $b=0$).
- **Une** droite donnée admet une **infinité** d'équations cartésiennes, puisqu'elle admet une infinité de vecteurs normaux.
  Par contre, si elle admet une équation réduite, elle n'en a qu'une seule.

III. Équation cartésienne de cercles

III.1. Cercle défini par centre et rayon

Théorème

Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ un point du plan et r un réel strictement positif.
Alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r a pour équation cartésienne :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r. Si $M(x\,;\,y)$ est un point quelconque,

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{C} &\Leftrightarrow AM=r\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=r\\ &\Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2.\end{aligned}$$

Exemple

Soit le cercle $\mathcal{C}$ ayant centre $A(2\,;-1)$ et pour rayon 5. Il a pour équation cartésienne $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Le point $B(6\,;2)\in\mathcal{C}$ car $6-2)^2+(2+1)^2=16+9=25$.

Mais le point $D(-3\,;-2)\notin\mathcal{C}$ car $(-3-2)^2+(-2+1)^2=25+1=26\neq 25$.

Remarque

Autrement dit, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient une égalité du type $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$ est l'ensemble des points du cercle de centre A et de rayon r.

Il arrive aussi qu'on donne une équation cartésienne de cercle sous forme développée. Dans ce cas, il est un peu plus difficile de repérer les coordonnées du centre et le rayon : il faut alors revenir aux *formes canoniques*

Par exemple,

$$\begin{aligned}x^2+y^2-4x+5y+3=0 &\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+5y=-3\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+2^2+y^2+5y+2{,}5^2=-3+2^2+2{,}5^2\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+2{,}5)^2=-3+4+\frac{25}{4}\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+2{,}5)^2=\frac{29}{4}\end{aligned}$$

Donc il s'agit du cercle de centre $A(2;-2{,}5)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

III.2. Cercle défini par un diamètre

Rappel

Soient A et B deux points. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Autrement dit, le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que le triangle AMB est rectangle en M.

Démonstration

Notons $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB], I le milieu de [AB] et r la distance AI = IB.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0\\ &\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})-IA\times IB=0\\ &\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}-r\times r=0\\ &\Leftrightarrow MI^2=r^2\\ &\Leftrightarrow MI=r\\ &\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}\end{aligned}$$

☑

Exemple v1

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] où $A(1;-5)$ et $B(3;0)$.

Le milieu de [AB] a pour coordonnées $I\left(\dfrac{1+3}{2}:\dfrac{-5+0}{2}\right)=(2;-2{,}5)$ et $AB=\sqrt{(3-1)^2+(0-(-5))^2}=\sqrt{29}$.

Ainsi $r=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$ et donc $\mathcal{C}$ a donc pour équation cartésienne $(x-2)^2+(y+2{,}5)^2=\dfrac{29}{4}$.

Exemple v2

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] où A(1;−5) et B(3;0).

$M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ -5-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-x \\ -y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(3-x) + (-5-y)(-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - x - 3x + x^2 + 5y + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 5y + 3 = 0$$

On retrouve bien la même équation de cercle, sous forme développée ou sous forme canonique suivant la méthode utilisée.

Exercice

Donner la nature (droite, cercle, parabole, …) des ensembles de points ci-dessous et en préciser les éléments caractéristiques (pour une droite : un point et un vecteur normal ou un vecteur directeur, pour un cercle : le centre et le rayon, …)

1. $5x + 4y - 3 = 0$
2. $x = 5$
3. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 12$
4. $x^2 + y^2 = 1$
5. $(x-2) + (y-5) = 4$
6. $3x - 5 = 2y + 1$
7. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$
8. $y = 3x^2 - 5x + 1$
9. $x^2 - y^2 = 0$

DOC 41

CH14 - Compléments sur le produit scalaire - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

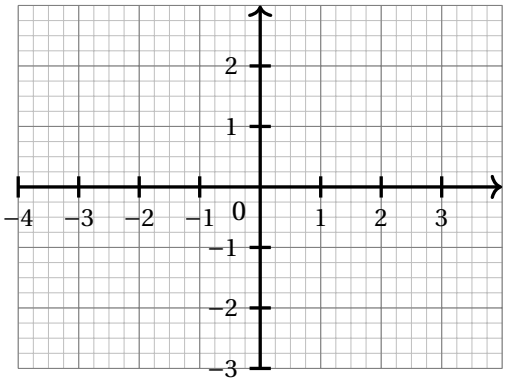
Exercice 1

1. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les quatre droites ci-dessous définies par leur équation cartésienne :

$$(d_1) : 2x-3y+3=0 \quad ; \quad (d_2) : -2x-y+1=0$$
$$(d_3) : 4x+8y-10=0 \; ; \quad (d_4) : -3x+y+4=0$$

a. Pour chacune des droites, donner un point et un vecteur directeur de cette droite.

b. Tracer chacune de ces droites dans le repère ci-dessous :



2. On considère le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour chaque question, déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$:

a. A$(2;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$;

b. A$(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$;

c. A$(0;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$;

d. A$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

3. On considère le plan munit d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}$ pour vecteur normal :

a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et A$(1;0)$;

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et A$(-2;1)$.

4. On munit le plan d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

a. On considère la droite (d) admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passant par A$(4;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

b. On considère la droite (D) admettant l'équation cartésienne : $x-4y+3=0$.
Donner un vecteur $\vec{n'}$ normal de (D), un vecteur $\vec{u}$ directeur de (D) et un point B appartenant à (D).

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points A$(-2;-3)$ et B$(4;1)$. On note (d) la médiatrice du segment [AB].

1. Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment [AB].
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

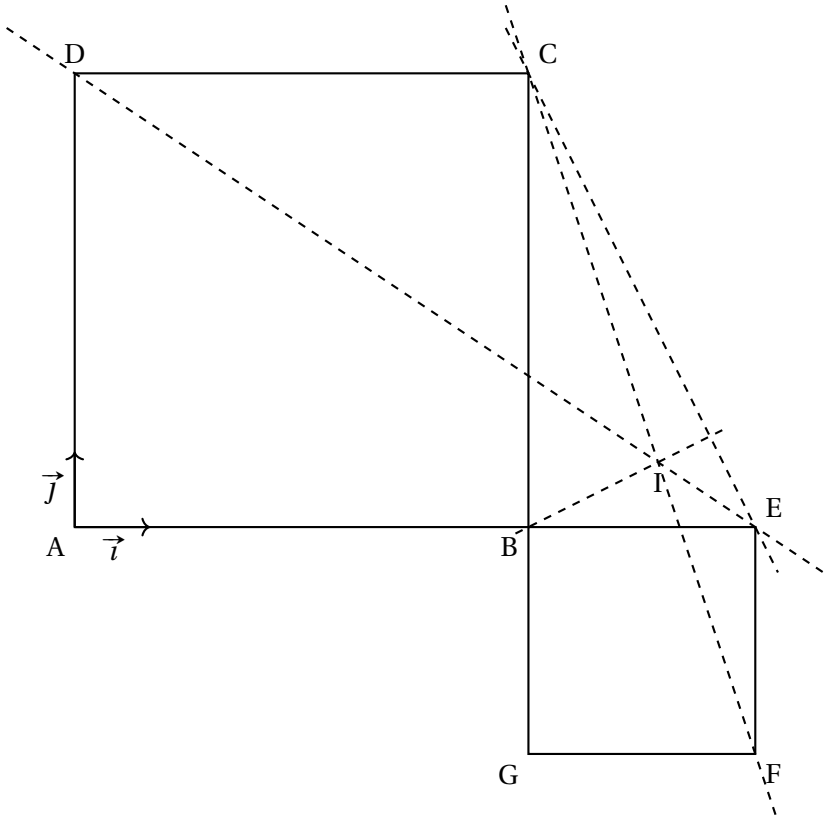
Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite (d) d'équation cartésienne : $-3x+y+7=0$.

1. Donner un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (d).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (d) et passant par le point de coordonnées A$(-2;2)$.
3. Soit (D) la droite perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point B$(3;-1)$.
   a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ normal à la droite (D).
   b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D).

Exercice 4

Dans le plan, on considère les deux carrés ABCD et BEFG représentés ci-dessous :



On munit le plan du repère orthonormé $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ où AB = 6 et BE = 3.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$.
   b. En déduire les équations cartésiennes des droites (DE) et (CF) dans le plan $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées du point I.
3. Justifier que les droites (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

Exercice 5

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dont l'unité est le centimètre.

   On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r. Pour chaque question, déterminer une équation du cercle :

   a. I$(1;2)$ et $r = 3$ cm ;

   b. I$(-3;1)$ et $r = 5$ cm.

2. On considère le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé et le cercle $\mathcal{C}$ de centre A$(2;1)$ et de rayon 4.

   Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

3. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre K$(3;-1)$ et de rayon R $= 5$.

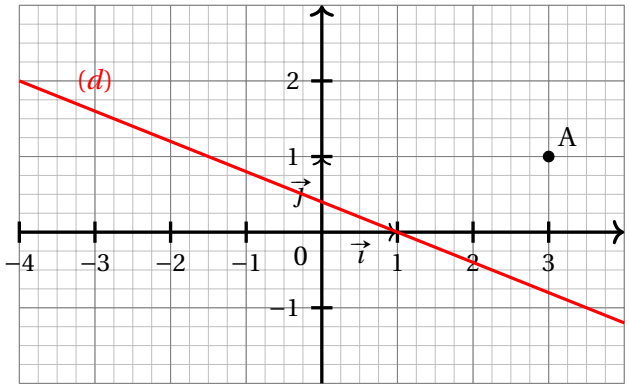
   a. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

   b. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathcal{C}$:

$$\text{M}(-1;2)\ ;\quad \text{N}\left(\frac{8}{5};-\frac{29}{5}\right)\ ;\quad \text{P}\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$$

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé, on considère le point A$(3;1)$ et la droite (d) représentée ci-dessous d'équation cartésienne : $2x + 5y - 2 = 0$.



On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

1. Construire le point H dans le repère.

2. Justifier que la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d) a pour équation :

$$(\Delta) : -5x + 2y + 13 = 0$$

3. Déterminer les coordonnées du point H.

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les trois points : A$(-3;2)$; B$(3;5)$; C$(2;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

DOC 42

CH14 - Compléments sur le produit scalaire - Exercices (Correction)

Exercice 1

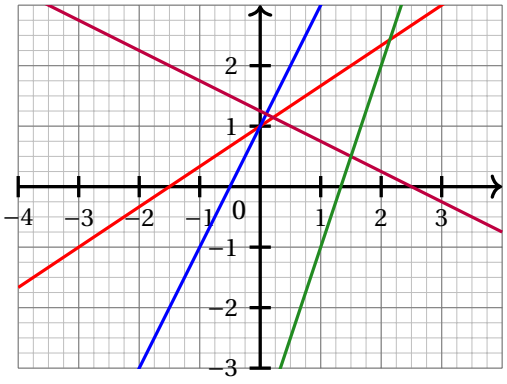
1. **a.** Pour déterminer un point de cette droite, on peut fixer une valeur de x et déterminer la valeur de y.

De plus, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by+c=0$.

- pour (d_1), on prend $x=0$ et on trouve $-3y+3=0 \Leftrightarrow y=1$ et on obtient directement $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$;
- pour (d_2), on prend $x=0$ et on trouve $-y+1=0 \Leftrightarrow y=1$ et on obtient directement $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$;
- pour (d_3), on prend $x=0$ et on trouve $8y-10=0 \Leftrightarrow y=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ et on obtient directement $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$;
- pour (d_4), on prend $x=0$ et on trouve $y+4=0 \Leftrightarrow y=-4$ et on obtient directement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

b. On peut « repasser » par l'équation réduite pour tracer les droites :

- (d_1) : $2x-3y+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+1$;
- (d_2) : $-2x-y+1=0 \Leftrightarrow y=2x+1$;
- (d_3) : $4x+8y-10=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{8}x+\frac{10}{8}=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$;
- (d_4) : $-3x+y+4=0 \Leftrightarrow y=3x-4$.



2. **a.** A$(2;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$:

- une équation cartésienne est de la forme $3x-2y+c=0$;
- avec le point A, on trouve $3\times 2-2\times 1+c=0 \Leftrightarrow c=-4$.

On obtient $3x+2y-4=0$.

b. Pour A$(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

On a $-x-\frac{1}{2}y+c=0$ et $-3-\frac{1}{2}\times(-2)+c=0 \Leftrightarrow c=2$.
On obtient $-x-\frac{1}{2}y+2=0 \Leftrightarrow -2x-y+4=0 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$.

c. Pour A$(0;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

On a $x+2y+c=0$ et $0+2\times 3+c=0 \Leftrightarrow c=-6$.
On obtient $x+2y-6=0$.

d. Pour A$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

On a $-\frac{5}{3}x-3y+c=0$ et $-\frac{5}{3}\times(-2)-3\times\frac{1}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{11}{6}$.
On obtient $-\frac{5}{3}x-3y-\frac{11}{6}=0 \Leftrightarrow -10x-18y-11=0 \Leftrightarrow 10x+18y-11=0$.

3. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite d'équation $ax+by+c=0$. Donc

a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et A(1 ; 0) donnent $2x+3y+c=0$ puis $2\times 1+3\times 0+c=0 \Leftrightarrow c=-2$.
On obtient l'équation cartésienne $2x+3y-2=0$.

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et A(−2 ; 1) donnent $-x+y+c=0$ puis $-(-2)+1+c=0 \Leftrightarrow c=-3$.
On obtient l'équation cartésienne $-x+y-3=0$.

4. **a.** On considère la droite (d) admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passant par A(4 ; 1).
Une équation cartésienne de la droite (d) est $-2x+y+c=0$ avec $-2\times 4+1+c=0 \Leftrightarrow c=7$.
Ainsi on obtient $(d) : -2x+y+7=0$.

b. Pour la droite (D) : $x-4y+3=0$:

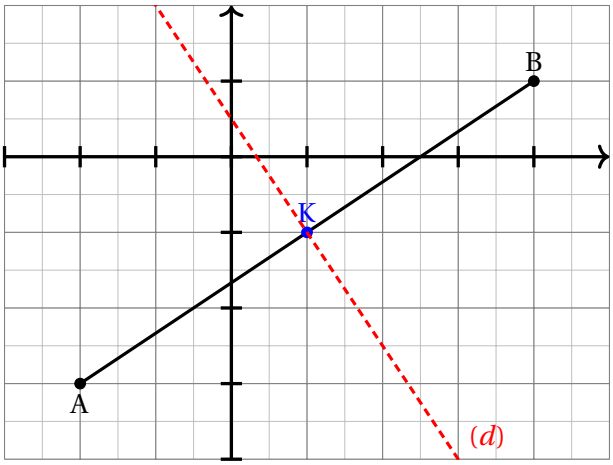
- $\vec{v'}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (D) ;
- $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ;
- avec $x=1$, on trouve $y=1$ ce qui donne le point B(1 ; 1).

Exercice 2

1. On obtient directement K(1 ; −1).

2. La médiatrice du segment [AB] étant une droite perpendiculaire à la droite (AB), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d).

3. On en déduit que la droite (d) admet pour équation cartésienne : $6x+4y+c=0$.
Le point K appartenant à la droite (d) : $6\times 1+4\times(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=-2$.
Ainsi la droite (d) admet pour équation cartésienne : $6x+4y-2=0$.



Exercice 3

1. Un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ est directeur de la droite (d).

2. La droite (Δ) est parallèle à (d), donc a une équation de la forme $-3x+y+c=0$ (même vecteur directeur).
Avec le point A, on a $-3\times(-2)+2+c=0 \Leftrightarrow c=-8$. Ainsi $(\Delta) : -3x+y-8=0$.

3. **a.** Le vecteur $\vec{v}$ étant normal à la droite (D) et la droite (D) étant perpendiculaire à la droite (d), on en déduit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la (d).

De ce fait, on peut prendre $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal à (D).

b. La droite (D) admet une équation cartésienne de la forme : $x+3y+c=0$.

Avec le point B, on obtient $3+3\times(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

Ainsi la droite (D) admet pour équation cartésienne : $x+3y=0$.

Exercice 4

1. **a.** On lit directement $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$.

b. On détermine les équations cartésiennes des droites :

- $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur directeur de la droite (DE), son équation cartésienne est de la forme : $6x+9y+c=0$; avec le point D, on a $6\times0+9\times6+c=0 \Leftrightarrow c=-54$; une équation cartésienne de la droite (DE) est : $6x+9y-54=0$.
- $\overrightarrow{FC}$ est un vecteur directeur de la droite (FC), son équation cartésienne est de la forme : $9x+3y+c=0$; avec le point C, on a $9\times6+3\times6+c=0 \Leftrightarrow c=-72$; une équation cartésienne de la droite (FC) est : $9x+3y-72=0$.

2. Le point I est l'intersection de (DE) et (CF), ses coordonnées doivent vérifier le système $\begin{cases}6x+9y-54=0\\9x+3y-72=0\end{cases}$.

Par substitution, ou par calculatrice, on obtient $I\left(\frac{54}{7};\frac{6}{7}\right)$.

3. On travaille sur les vecteurs $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}12/7\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{12}{7}\times3+\frac{6}{7}\times(-6)=\frac{36}{7}-\frac{36}{7}=0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux, et donc que (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

Exercice 5

1. **a.** Avec I(1 ; 2) et $r=3$ cm, on obtient $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$.

Soit encore $x^2-2x+1+y^2-4y+4=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y+4=0$.

b. Avec I(−3 ; 1) et $r=5$ cm, on obtient $(x-(-3))^2+(y-1)^2=5^2$.

Soit encore $x^2+6x+9+y^2-2y+1=25 \Leftrightarrow x^2+y^2+6x-2y-15=0$.

2. Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-2)^2+(y-1)^2=4^2$.

Soit encore $x^2-4x+4+y^2-2y+1=16 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-11=0$.

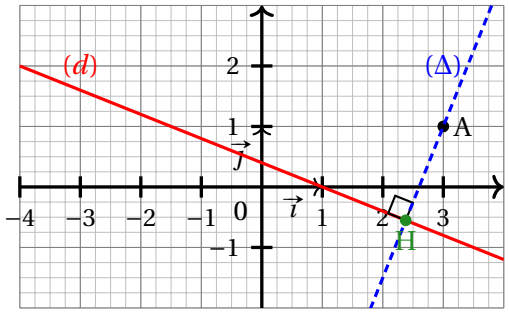
3. **a.** Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est $(x-3)^2+(y-(-1))^2=5^2$.

Soit encore $x^2-6x+9+y^2+2y+1=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y-15=0$.

b. On teste l'équation de $\mathcal{C}$ avec les coordonnées des points proposés :

- $x_M^2+y_M^2-6x_M+2y_M-15=(-1)^2+2^2-6\times(-1)+2\times2-15=1+4+6+4-15=0$, donc $M\in\mathcal{C}$.
- $x_N^2+y_N^2-6x_N+2y_N-15=\ldots=0$, donc $N\in\mathcal{C}$.
- $x_P^2+y_P^2-6x_P+2y_P-15=\ldots=-21{,}6\neq0$, donc $P\notin\mathcal{C}$.

Exercice 6



1. Pour construire H, on trace la perpendiculaire à (d) passant par A.

2. La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$, qui est donc un vecteur normal à (Δ).

   Ainsi (Δ) a pour équation cartésienne : $-5x+2y+c=0$ et avec A, on a $-5\times 3+2\times 1+c=0 \Leftrightarrow c=13$.

   On (re)trouve bien comme équation cartésienne de (Δ) : $-5x+2y+13=0$.

3. Le point H étant l'intersection de (d) et de (Δ), donc on s'intéresse au système $\begin{cases}2x+5y-2=0\\-5x+2y+13=0\end{cases}$.

   Par substitution, ou par calculatrice, on obtient $\mathrm{H}\left(\frac{69}{29};-\frac{16}{29}\right)$.

Exercice 7

1. Le point H est l'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire, notée (d), à (AB) passant par C.

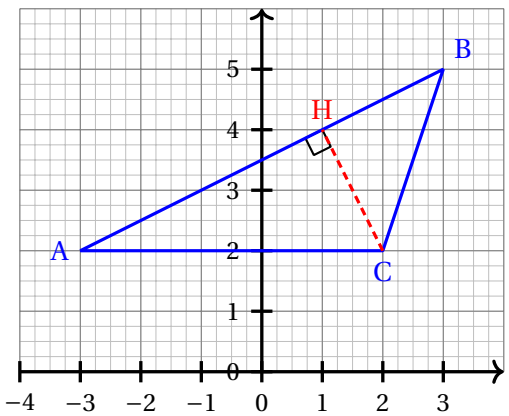
   Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ est directeur de (AB) et normal à (d).

   - (AB) : $3x-6y+c=0$ et avec A on trouve $3\times(-3)-6\times 2+c=0 \Leftrightarrow c=21$.
     Ainsi (AB) : $3x-6y+21=0 \Leftrightarrow x-2y+7=0$.
   - (d) : $6x+3y+c=0$ et avec C on trouve $6\times 2+3\times 2+c=0 \Leftrightarrow c=-18$
     Ainsi (d) : $6x+3y-18=0 \Leftrightarrow 2x+y-6=0$.

   Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases}x-2y+7=0\\2x+y-6=0\end{cases}$, on obtient $\mathrm{H}(1\,;4)$.

2. L'aire du triangle ABC. peut s'obtenir de ce fait par $\mathcal{A}=\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}}{2}$:

   $$\left.\begin{cases}\mathrm{AB}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}\\\mathrm{CH}=\sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}\end{cases}\right| \Rightarrow \mathcal{A}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}}{2}=\frac{\sqrt{45}\times\sqrt{5}}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5 \text{ unités d'aires.}$$



DOC 43

CH15 - Méthodes et techniques à connaître

Chapitre 01 : Polynômes du second degré (⇝ MC)

À savoir

Je sais :

- reconnaître les différentes formes (développée, canonique, factorisée) ☐
- passer d'une forme à une autre ☐
- déterminer le tableau de variations d'un trinôme ☐
- calculer le discriminant et les éventuelles racines d'un trinôme ☐
- résoudre une équation du 2^d degré ☐
- déterminer l'équation d'une parabole connaissant certaines de ses caractéristiques ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- déterminer les solutions d'une équation du 2^d degré avec le menu équation ☐

Chapitre 02 : Généralités sur les suites numériques (⇝ MC)

À savoir

Je sais :

- travailler avec une formule explicite, une formule de récurrence ☐
- représenter graphiquement les termes d'une suite (nuage, toile) ☐
- étudier le sens de variation (ou la monotonie) d'une suite ☐
- conjecturer la limite éventuelle d'une suite ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- afficher les premiers termes d'une suite, grâce au menu suite ☐
- conjecturer variations, limite ☐
- tabuler pour déterminer un seuil ☐

Outil

Je peux, avec un tableur :

- déterminer les formules nécessaires à l'étude de suites ☐
- conjecturer variations, limite ☐
- tabuler pour déterminer un seuil ☐

Algorithme

Je peux, avec un `algorithme` :

- déterminer le terme d'une suite récurrente ☐
- déterminer un seuil ☐
- calculer une somme de termes ☐

Chapitre 03 : Droites et fonctions affines (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- tracer une droite connaissant son équation réduite ☐
- travailler graphiquement sur la pente et l'ordonnée à l'origine ☐
- déterminer, algébriquement, l'équation d'une droite passant par deux points ☐
- déterminer le (tableau de) signe et la variation d'une fonction affine ☐

Chapitre 04 : Second degré, études de signes (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- déterminer le (tableau de) signe d'un trinôme ☐
- étudier un signe ou résoudre une inéquation avec un tableau de signes (ZPQ) ☐
- étudier la position relative de deux courbes ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- vérifier graphiquement les solutions d'une inéquation ☐

Chapitre 05 : Probabilités conditionnelles, indépendance (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- utiliser la formule de la réunion ☐
- travailler sur l'indépendance de deux évènements ☐
- modéliser une situation à l'aide d'un tableau, d'un arbre, d'un diagramme, etc ☐
- utiliser un tableau pour calculer des probas (intersection, réunion, conditionnelles) ☐
- utiliser un arbre pour calculer des probas (composées, totales, conditionnelles) ☐

Chapitre 06 : Trigonométrie

♥ À savoir

Je sais :

- passer des radians aux degrés ☐
- manipuler le cercle trigonométrique, y placer un angle en radian ☐
- lire un angle associé à un point du cercle trigonométrique ☐
- manipuler les cosinus et sinus des angles particuliers ☐
- résoudre des équations trigonométriques simples ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- convertir des degrés aux radians, et inversement ☐
- déterminer le cosinus, le sinus et la tangente d'un réel ☐

Outil

Je peux, avec mon cercle trigonométrique :

- lire les lignes trigonométriques d'un angle ☐
- résoudre une équation trigonométrique ☐

Chapitre 07 : Nombre dérivé, tangente (⇝ MC)

À savoir

Je sais :

- calculer un nombre dérivé par la limite du taux d'accroissement ☐
- interpréter un nombre dérivé comme pente de tangente ☐
- lire graphiquement un nombre dérivé ☐
- déterminer l'équation d'une tangente ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- calculer un nombre dérivé ☐
- tracer la tangente à une courbe correctement affichée ☐

Chapitre 08 : Fonctions dérivées (⇝ MC)

À savoir

Je sais :

- reconnaître la forme générale d'une fonction afin de la dériver ☐
- utiliser les formules de dérivation pour dériver une fonction ☐
- utiliser la fonction dérivée afin de déterminer l'équation d'une tangente ☐
- transformer la dérivée afin d'étudier son signe ☐

Outil

Je peux, avec un logiciel de calcul formel :

- retrouver la dérivée d'une fonction ☐

Chapitre 09 : Suites arithmétiques, géométriques (⇝ MC)

À savoir

Je sais :

- reconnaître une suite arithmétique, uns suite géométrique ☐
- utiliser les formules de récurrence et les formules explicites des suites arithmétiques et géométrique ☐
- calculer la somme des termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique ☐
- démontrer qu'une suite est arithmétique, géométrique ☐
- étudier le sens de variation d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique ☐

Chapitre 10 : Calcul vectoriel, produit scalaire

À savoir

Je sais :

- calculer un produit scalaire à l'aide de l'une des trois formes ☐
- étudier l'orthogonalité de deux vecteurs ☐
- utiliser un produit scalaire pour déterminer un angle ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- déterminer un angle connaissant son cosinus ☐

Chapitre 11 : Applications de la dérivation (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- étudier les variations d'une fonction et dresser son tableau de variations ☐
- déterminer maximum/minimum ☐
- faire le lien entre extremum et dérivée ☐

Calculatrice

Je peux, avec ma calculatrice :

- tracer la courbe d'une fonction dans une fenêtre adaptée ☐
- utiliser les outils graphiques de la calculatrice (max, min, racine, etc) ☐

Chapitre 12 : Variables aléatoires (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- déterminer les valeurs prises par une variable aléatoire ☐
- déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ☐
- calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire ☐
- interpréter l'espérance d'une variable aléatoire ☐
- déterminer si un jeu est équitable, favorable au joueur, etc ☐

Chapitre 13 : Fonction exponentielle (⇝ MC)

♥ À savoir

Je sais :

- exploiter le fait qu'une exponentielle est strictement positive ☐
- manipuler les propriétés algébrique de l'exponentielle (relation fonctionnelle, etc) ☐
- résoudre des (in)équations avec de l'exponentielle ☐
- étudier le signe d'une expression faisant intervenir de l'exponentielle ☐
- représenter l'allure de la courbe des fonctions $x \mapsto e^{kx}$ ☐
- dériver des fonctions faisant intervenir de l'exponentielle ☐
- interpréter une évolution exponentielle (lien avec les suites géométriques) ☐

Chapitre 14 : Équations cartésiennes, droites et cercles

♥ À savoir

Je sais :

- utiliser les formules d'Al-Kashi ☐
- manipuler une équation cartésienne de droite (vecteur directeur, vecteur normal, etc) ☐
- manipuler une équation cartésienne de cercle (centre/rayon, utilisation de la forme canonique, etc) ☐

DOC 44

En route vers la Terminale

Un « petit cahier de vacances »

I. Suites et second degré

Exercice A1 : calculs des termes de suites

Calculer les 3 premiers termes de chacune des suites suivantes, en précisant si ces dernières sont définition par récurrence ou de manière explicite :

1. $u_n = 2n^2 - n + 1$.
2. $\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1 - v_n}{n} \end{cases}$.
3. $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = 2w_n - 1$.
4. $t_n = 3\big(1 + (-1)^n\big) + 2$.

Exercice A2 : suites arithmétiques et géométriques

1. Soit (u_n) arithmétique de 1er terme 2 et de raison -3.
   a. Donner sa définition par formule de récurrence puis sa formule explicite (en fonction de n).
   b. En déduire une valeur de $u_{1\,000}$.
2. Soit (v_n) définie pour tout n entier naturel par $v_n = 4 \times 0{,}5^n$.
   a. Expliquer pourquoi cette suite est géométrique.
   b. Donner sa définition par récurrence.
   c. Montrer que la somme $S = v_0 + v_2 + \ldots + v_{10}$ vaut environ 7,996.

Exercice A3 : « où l'on parle de suite géométrique »

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2 % par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année).
2. Exprimer u_{n+1}, en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Déterminer la formule explicite donnant u_n en fonction de n.
4. Déterminer, en détaillant, le sens de variations de la suite (u_n).
5. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
   a. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année.
   b. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années.

Exercice A4 : conjecture de limite à la calculatrice

À la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (t_n) définie par $t_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 0{,}5t_n - 12$.

Exercice A5 : monotonie d'une suite(un peu « costaud »)

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ grâce à chacune des trois méthodes suivantes :

1. en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
2. en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (on s'assurera au préalable que tous les termes de la suite sont strictement positifs) ;
3. en étudiant les variations de la fonction f telle que $u_n = f(u_n)$.

Exercice A6 : résolution d'équations du 2nd degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes :

1. $2x^2 - 2x - 12 = 0$;
2. $-x^2 + x = -2$;
3. $3x^2 + x\sqrt{12} + 1 = 0$;
4. $4x^2 + 16 = 0$;
5. $x^2 + x = 0$;
6. $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + x + 1) = 0$.

Exercice A7 : signe d'une expression (fonction affine et polynôme du 2nd degré)

1. Déterminer le signe de $4x - 7$.
2. Déterminer le signe de $-2x^2 + 7x - 6$.

Exercice A8 : résolution d'inéquations du 2nd degré

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $-x^2 + x + 2 > 0$;
2. $3x^2 - 2x \leqslant 0$.

Exercice A9 : une inéquation pour les dominer toutes !(un peu « costaud »)

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{2x}{1-x} \geqslant \dfrac{x+2}{x}$.

II. Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

Exercice B1 : maladie et diagnostic

Des études statistiques montrent que 6 % des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée.
Un test est utilisé pour diagnostiquer la maladie. On a les résultats statistiques suivants :

- sachant qu'un individu est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est de 0,95 ;
- sachant qu'un individu n'est pas malade, la probabilité qu'il ait un test négatif est de 0,97.

On désigne par M l'événement « être malade » et par T l'événement « avoir un test positif ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculer les probabilités des événements $\mathrm{M} \cap \mathrm{T}$, $\overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{T}}$ et $\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}$.
3. En déduire la probabilité d'avoir un test positif.
4. Déterminer la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

Exercice B2 : probabilité conditionnelle et tableau

Dans l'étude de certaines maladies, on voudrait savoir si le fait de fumer joue un rôle aggravant ou pas.
On dispose des statistiques ci-contre concernant une population de 20 000 personnes.

	Malades	**Sains**	**Total**
Fumeurs	400	4 600	
Non-Fumeurs	600	14 400	
Total			

On note M l'événement « la personne est malade » et F l'événement « la personne fume ».
On choisit au hasard une personne dans cette population.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. a. Calculer $p_{\text{F}}(\text{M})$.
   b. Que représente la probabilité précédente ?
3. Si l'on sait que cette personne ne fume pas, quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
4. Le fait de fumer est-il un facteur aggravant ?

Exercice B3 : probabilité et temps partiel

Dans une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que :

- 60 % de la population sont des femmes ;
- 56 % des femmes travaillent à temps partiel ;
- 36 % de la population travaillent à temps partiel.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. On interroge une personne dans la population. Elle affirme qu'elle travaille à temps partiel.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Exercice B4 : loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Probas $\text{P}(\text{X} = x_i)$	0,10	0,05	0,15	0,05	0,10	0,20	0,10	0,10	a

1. Déterminer la valeur de a.
2. a. Calculer $\text{P}(\text{X} > 3)$.
   b. Calculer $\text{P}(\text{X} \leqslant 3)$.

Exercice B5 : variable aléatoire et espérance

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard une boule, on note le numéro, on replace cette boule, on tire une deuxième boule et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Si je gagne une la somme égale à la valeur de X, combien puis-je espérer gagner ?

Exercice B6 : « arbre pondéré et variable aléatoire »

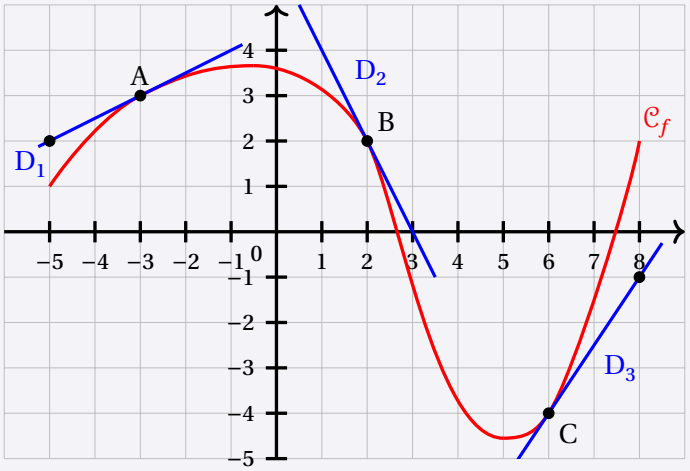
Sur la planète Dictat, le gouvernement met en œuvre une politique nataliste.
Toute famille doit avoir au moins un enfant, au plus trois enfants et au plus un garçon.
Dès que l'on a un garçon, on n'a pas d'autre enfant. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'enfants d'une famille.
On suppose l'équiprobabilité des garçons et des filles à la naissance.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Interpréter le résultat.

III. Fonctions

Exercice C1 : lecture de nombres dérivés

Sur le graphique suivant, $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;8]$.



D_1, D_2 et D_3 sont respectivement les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A, B et C d'abscisses -3, 2 et 6.

1. Lire sur le graphique les valeurs de :
   a. $f(-3)$, $f(2)$ et $f(6)$;
   b. $f'(-3)$, $f'(2)$ et $f'(6)$.
2. a. Pour quelle(s) abscisse(s) a semble-t-on avoir $f'(a)=0$?
   b. Quelle est la conséquence graphique pour la tangente au point d'abscisse a ?

Exercice C2 : dérivées, techniques et dérivation

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes sur le domaine d'étude précisé :

1. $f(x)=3x^4-0{,}5x^2-\dfrac{1}{x}$ sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$.
2. $g(x)=x\sqrt{x}$ sur $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}_+^*$.
3. $h(x)=\dfrac{-2x-3}{x+2}$ sur $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
4. $i(x)=(1-x)^4$ sur $\mathcal{D}_i=\mathbb{R}$.

Exercice C3 : nombre dérivé et équation de tangente

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Déterminer $f'(-1)$.
   b. Que représente – graphiquement – ce nombre ?
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_{-1}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

Exercice C4 : étude variations

Après avoir donné leur ensemble de définition et de dérivabilité, étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$;
2. $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 4$.

Exercice C5 : utiliser les règles de l'exponentielle

1. Simplifier $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{x} \times \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^3$.
2. Développer $\mathrm{C} = \mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}\right)$ et $\mathrm{D} = \left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}\right)\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}\right)$.
3. Factoriser $\mathrm{E} = 2\mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{2x}$.

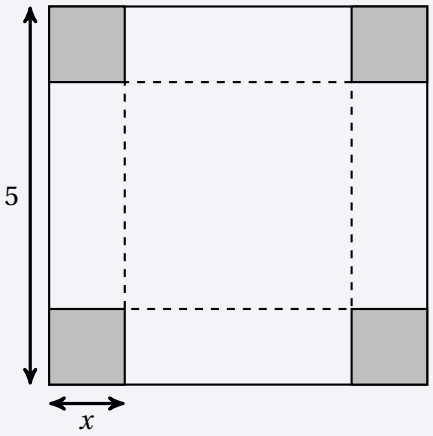
Exercice C6 : dérivées et exponentielle

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'ensemble précisé.

1. $f(x) = -3\mathrm{e}^{x} + 4\mathrm{e}^{-2x+1} + \mathrm{e}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $i(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x+1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
5. $j(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{x} - 1}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice C7 : volume d'une cuve

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 5 m de côté. À chaque coin de la plaque, on découpe un carré de côté x m.
En pliant et en soudant, on obtient alors une cuve et on note $\mathcal{V}$ la fonction donnant son volume en fonction des valeurs de x.



1. Déterminer l'ensemble de définition puis l'expression de la fonction $\mathcal{V}$ en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction $\mathcal{V}$.
3. Déterminer les dimensions de la cuve de volume maximal.

Exercice C8 : avec une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + x + 1$.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$.
   a. Étudier les variations de g.
   b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.
3. Montrer que $f'(x) = g(x)$ et en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice C9 : un caillou à la mer

Un enfant monte au sommet d'un phare et laisse tomber verticalement un caillou dans la mer.
On modélise la vitesse (en mètre par seconde) du caillou au bout de t secondes par la fonction :

$$f(t) = 6 \times \frac{\mathrm{e}^{0,1t} - 1}{\mathrm{e}^{0,1t} + 1}.$$

1. Vérifier que le caillou est bien lâché sans vitesse initiale selon ce modèle.
2. a. Déterminer une expression de $f'(t)$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
3. La vitesse du caillou dépassera-t-elle les 10 m.s^{-1} ?

IV. Géométrie

Exercice D1 : savoir utiliser le cercle trigonométrique

En s'aidant du cercle trigonométrique :

1. Placer 5π ; $-\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{9\pi}{4}$.
2. Donner la mesure principale de $\dfrac{123\pi}{6}$.

Exercice D2 : valeurs de cosinus et sinus

Grâce au cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$;
2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$;
3. $\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}\right)$;
4. $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$;
5. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$;
6. $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;
7. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$;
8. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$;
9. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice D3 : produit scalaire et vecteurs orthogonaux

On considère un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Justifier.
2. $\vec{w}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux? Justifier.
3. Déterminer les éventuelles valeurs réelles de a pour que $\vec{t_1}\begin{pmatrix}3\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{t_2}\begin{pmatrix}6\\-a\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice D4 : droites perpendiculaires et produit scalaire (méthode analytique)

Dans un repère orthonormé du plan, on donné A(5 ; 3), B(8 ; −5), C(−1 ; 0) et D(3 ; 1,5).
Montrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice D5 : produit scalaire et nature de quadrilatère

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé, on considère les quatre points A(−3 ; 2) ; B(−2 ; −2) ; C(2 ; −1) et D(1 ; 3).

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. **a.** Calculer les longueurs AB et AD.
   b. Déterminer une valeur de l'angle $\widehat{DAB}$.
3. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

Exercice D6 : équations cartésiennes et vecteur directeur

1. Soit (d) la droite passant par $A(4\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Déterminer une éq. cartésienne de (d).

2. Soit (d') la droite d'éq. cartésienne $3x-1{,}5y+1=0$. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4{,}5\\-9\end{pmatrix}$ est-il un vecteur directeur de (d') ?

Exercice D7 : droite, vecteurs directeurs et normaux, équations cartésiennes et réduites

On considère la droite d d'équation réduite $y=-4x+5$.

1. Donner un vecteur directeur de d.

2. En déduire un vecteur normal de d.

3. Donner une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à d passant par le point $A(1\,;1)$.

4. Donner une équation réduite de la droite d'.

Exercice D8 : vecteur normal et équation cartésienne de droite

1. Donner un vecteur normal de chacune des droites suivantes :

a. $d_1 : -3x+2y+1=0$;

b. $d_2 : 5x+y-6=0$;

c. $d_3 : y=-2x+4$;

d. $d_4 : x=1$.

2. Dans chacun des cas, donner une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a. $A(4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$;

b. $A(2\,;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$;

c. $A(-2\,;-1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$;

d. $A(0\,;5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

Exercice D9 : équation cartésienne de cercle

1. Déterminer une équation cartésienne :

a. du cercle de centre $\Omega(5\,;4)$ et de rayon $R=2$;

b. du cercle de centre $\Omega(-2\,;-3)$ et de rayon $R=5$.

2. Dans chacun des cas, donner le centre et le rayon du cercle dont on donne une équation cartésienne :

a. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$;

b. $x^2+y^2-4x+5y+3=0$.

V. Algorithmes

Exercice E1 : avec un seuil

On considère la fonction python suivante :

Code Python
```
def evolu(k):
    u = 200
    n = 0
    while u < k :
        u = 1.2*u + 10
        n = n+1
    return n
```

Que renvoie l'appel `evolu(750)` ?

Exercice E2 : avec une somme

Soit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 400$ vérifiant la relation, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60$. Compléter la fonction `Suite` suivante écrite en python qui permet de calculer la somme S des 20 premiers termes de la suite (u_n).

Code Python
```
def Suite() :
    S = 0
    U = 400
    for i in range(20) :
        S = ...............
        U = ...............
    return ...
```

Exercice E3 : en contexte

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région.
Au printemps 2019, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Il consulte les services spécialisés de la région et s'attend à perdre 8 % des colonies chaque hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il prévoit d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps, à partir de l'année suivante. On donne le programme suivant écrit en langage python :

Code Python
```
def algo() :
    C = 300
    N = 0
    while C < 400 :
        C = C*0.92+50
        N = N+1
    return(N)
```

1. Recopier et compléter (en arrondissant à l'entier le plus proche) en ajoutant des colonnes, le tableau ci-dessous qui reproduit l'avancement du programme pas à pas :

C	300	326	.....	
« C < 400 » ?	oui	oui	.....	

2. Quelle est la valeur de `N` renvoyée par le programme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

VI. Utilisation de la calculatrice

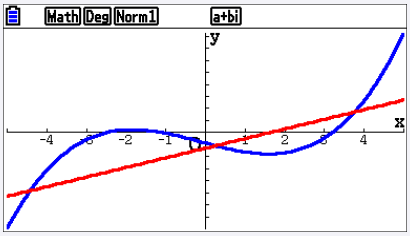
Exercice F1 : tracé

Dans un repère adapté, tracer – à la calculatrice – la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(x) = (100x+30)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

Exercice F2 : tracé et outils graphiques, v1

On considère les fonctions $f(x) = x^3 + 0{,}4x^2 - 8{,}77x - 8{,}8$ et $g(x) = 8x - 13$ définies sur $[-5;5]$.

1. Dans un repère adapté, tracer – à la calculatrice – les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de manière à obtenir une fenêtre comme ci-dessous :

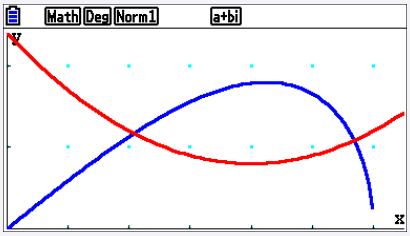


2. En utilisant les `outils graphiques` de la calculatrice :
   - **a.** déterminer les racines de f (autrement dit les solutions de $f(x) = 0$) ;
   - **b.** déterminer les solutions de $f(x) = 41$;
   - **c.** déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$.

Exercice F3 : tracé et outils graphiques, v2

On considère les fonctions $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ et $g(x) = x^2 - 8x + 24$ définies sur $[0;6{,}5]$.

1. Dans un repère adapté, tracer – à la calculatrice – les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de manière à obtenir une fenêtre comme ci-dessous :



2. En utilisant les `outils graphiques` de la calculatrice :
   - **a.** déterminer le maximum de f, ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint ;
   - **b.** déterminer les solutions de $f(x) = 10$;
   - **c.** déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$;
   - **d.** la valeur de $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Largement inspiré du travail d'Alexandre Morgan